

### Série 4

**Définition 1.** Soit  $G$  un groupe. On appelle *abéliénisation* de  $G$  le groupe abélien  $(G)_{ab}$  possédant la propriété universelle suivante. Pour tout groupe abélien  $H$  et tout homomorphisme de groupe  $f : G \rightarrow H$ , il existe un unique homomorphisme  $g : (G)_{ab} \rightarrow H$  tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & H \\
 \searrow \pi & & \nearrow g \\
 & (G)_{ab} &
 \end{array}$$

**Exercice 1.** Montrer l'existence et l'unicité de l'abéliénisation.

**Définition 2.** Soient  $G_0, G_1, G_2$  des groupes et  $\varphi_1 : G_0 \rightarrow G_1, \varphi_2 : G_0 \rightarrow G_2$  des homomorphismes de groupes. Une *somme amalgamée* (ou *pushout*) de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  est un groupe  $H$  muni de deux homomorphismes  $i_1 : G_1 \rightarrow H, i_2 : G_2 \rightarrow H$  tels que  $i_1 \circ \varphi_1 = i_2 \circ \varphi_2$ . De plus, pour tout homomorphisme  $\psi_1 : G_1 \rightarrow K, \psi_2 : G_2 \rightarrow K$  tels que  $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ , il existe un unique  $\psi : H \rightarrow K$  vérifiant  $\psi \circ i_s = \psi_s, s = 1, 2$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0 & \xrightarrow{\varphi_1} & G_1 & & \\
 \varphi_2 \downarrow & & \downarrow i_1 & \searrow \psi_1 & \\
 G_2 & \xrightarrow{i_2} & H & \xrightarrow{\psi} & K \\
 & \searrow \psi_2 & & &
 \end{array}$$

**Exercice 2.** Montrer l'existence de la somme amalgamée.

**Exercice 3** (Théorème du point fixe de Brouwer).

Toute application continue  $h : D^2 \rightarrow D^2$  possède un point fixe. Montrer ce théorème en utilisant que  $\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$ .

**Exercice 4** (Théorème fondamental de l'algèbre). Tout polynôme à coefficients dans  $\mathbb{C}$  de degré strictement supérieur à zéro possède une racine dans  $\mathbb{C}$ . Montrer ce résultat en utilisant que  $\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$ .

Indication : Faire une preuve par l'absurde. Commencer par définir une application  $f : S^1 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$  et calculer sa classe dans  $\pi_1 S^1$  pour  $(z, 0)$ . Construire ensuite une homotopie  $H : S^1 \times I \rightarrow S^1$  qui amènera une contradiction.

**Exercice 5.** Calculer  $\pi_1(S^1 \times S^1)$  en utilisant Seifert - van Kampen.

**Erratum exercice 6 série 2**

Pour montrer

$$X \text{ est un H-espace} \implies [Y, X]_* \text{ est un groupe } \forall Y$$

il est nécessaire que la multiplication de  $X$  soit également associative et possède des inverses à homotopie près. Un  $H$ -espace dont la multiplication possède ces deux propriétés supplémentaires est appelé un  $H$ -groupe. Par suite on a le résultat :

$$X \text{ est un H-groupe} \iff [Y, X]_* \text{ est un groupe (structure naturelle) } \forall Y .$$