Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess Hiver 07

Série 4

Définition 1. Soit G un groupe. On appelle *abéliénisation* de G le groupe abélien $(G)_{ab}$ possédant la propriété universelle suivante. Pour tout groupe abélien H et tout homomorphisme de groupe $f : G \longrightarrow H$, il existe un unique homomorphisme $g : (G)_{ab} \longrightarrow H$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & (G)_{ab} \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Exercice 1. Montrer l'existence et l'unicité de l'abéliénisation.

Définition 2. Soient G_0, G_1, G_2 des groupes et $\varphi_1 : G_0 \longrightarrow G_1$, $\varphi_2 : G_0 \longrightarrow G_2$ des homomorphismes de groupes. Une *somme amalgamée* (ou *pushout*) de φ_1 et φ_2 est un groupe H muni de deux homomorphismes $i_1 : G_1 \longrightarrow H$, $i_2 : G_2 \longrightarrow H$ tels que $i_1 \circ \varphi_1 = i_2 \circ \varphi_2$. De plus, pour tout homomorphisme $\psi_1 : G_1 \longrightarrow K$, $\psi_2 : G_2 \longrightarrow K$ tels que $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, il existe un unique $\psi : H \longrightarrow K$ vérifiant $\psi \circ i_s = \psi_s$, $s = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & G_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_1"] & \\ G_2 \arrow[r, "i_2"'] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & H \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\ & & K \end{tikzcd}$$

Exercice 2. Montrer l'existence de la somme amalgamée.

Exercice 3 (Théorème du point fixe de Brouwer)**.**
Toute application continue $h : D^2 \to D^2$ possède un point fixe. Montrer ce théorème en utilisant que $\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré strictement supérieur à zéro possède une racine dans $\mathbb{C}$. Montrer ce résultat en utilisant que $\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$.

Indication : Faire une preuve par l'absurde. Commencer par définir une application $f : S^1 \times \mathbb{R}_+ \to S^1$ et calculer sa classe dans $\pi_1 S^1$ pour $(z, 0)$. Construire ensuite une homotopie $H : S^1 \times I \to S^1$ qui amènera une contradiction.

Exercice 5. Calculer $\pi_1(S^1 \times S^1)$ en utilisant Seifert - van Kampen.

Erratum exercice 6 série 2
Pour montrer

$$X \text{ est un H-espace } \Longrightarrow [Y, X]_* \text{ est un groupe } \forall\, Y$$

il est nécessaire que la multiplication de X soit également associative et possède des inverses à homotopie près. Un H-espace dont la multiplication possède ces deux propriétés supplémentaires est appelé un *H-groupe*. Par suite on a le résultat :

$$X \text{ est un H-groupe } \iff [Y, X]_* \text{ est un groupe (structure naturelle) } \forall\, Y\,.$$