Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess Hiver 07

Série 5

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Trouver un espace topologique X tel que $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit S_3 le groupe symétrique d'indice trois. Trouver un espace topologique X tel que $\pi_1(X) \cong S_3$.

Exercice 3. Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes.

a) Montrer qu'il existe une application continue pointée $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ telle que $\pi_1 f = \varphi$.

b) Trouver une application continue pointée qui réalise l'homomorphisme

$$\varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} : \bar{n} \mapsto \bar{3n}.$$

Exercice 4. En utilisant que $\pi_1(S^n) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ prouver que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour $n \neq 2$.

Définition 1. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. La *suspension réduite* ΣX de X est définie par

$$\Sigma X = (X \times I)/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup I \times \{x_0\}).$$

Exercice 5. Montrer que pour tout espace topologique connexe par arcs X le groupe fondamental de la suspension réduite $\pi_1(\Sigma X)$ est trivial.