

Série 7

Exercice 1. Hormis $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi ix}$, trouver un autre revêtement tel que la correspondance de relèvement associée φ_{p,e_0} soit un homomorphisme.

Exercice 2. Soient E, B des groupes topologiques avec b_0 l'élément neutre de B . Montrer que si le revêtement $p : E \rightarrow B$ est un H -homomorphisme, alors la correspondance de relèvement associée φ_{p,e_0} est un homomorphisme.

Lemme 1 (Lemme général de relèvement). *Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement avec $p(e_0) = b_0$ et soit $f : Y \rightarrow B$ une application continue tel que $f(y_0) = b_0$. Supposons que Y est connexe par arcs et localement connexe par arcs (i.e. la topologie possède une base dont les ouverts sont connexes par arcs). Alors il existe un relèvement $\hat{f} : Y \rightarrow E$ tel que*

$$\hat{f}(y_0) = e_0 \iff \text{Im} \pi_1 \hat{f} \subseteq \pi_1 p.$$

De plus, si \hat{f} existe, alors il est unique.

Exercice 3. a) Prouver l'implication " \implies " du lemme ci-dessus.

b) Prouver l'unicité du relèvement.

c) ★★ Prouver l'existence du relèvement.

Exercice 4 (1^{er} théorème de classification). Soient $p : E \rightarrow B$ et $p' : E' \rightarrow B$ des revêtements avec $p(e_0) = b_0 = p'(e'_0)$, où E et E' sont des espaces connexes par arcs et localement connexe par arcs. Alors il existe une équivalence $h : E \rightarrow E'$ (i.e. un homéomorphisme tel que $p'h = p$) telle que $h(e_0) = e'_0$ si et seulement si $\pi_1 p(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1 p'(\pi_1(E', e'_0))$. De plus, si h existe, alors elle est unique.