Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess   Hiver 07

Série 7

Exercice 1. Hormis $p : \mathbb{R} \to S^1 : x \mapsto e^{2\pi ix}$, trouver un autre revêtement tel que la correspondance de relèvement associée φ_{p,e_0} soit un homomorphisme.

Exercice 2. Soient E, B des groupes toplogiques avec b_0 l'élément neutre de B. Montrer que si le revêtement $p : E \to B$ est un H-homorphisme, alors la correspondance de relèvement associée φ_{p,e_0} est un homomorphisme.

Lemme 1 (Lemme général de relèvement)**.** *Soit $p : E \to B$ un revêtement avec $p(e_0) = b_0$ et soit $f : Y \to B$ une application continue tel que $f(y_0) = b_0$. Supposons que Y est connexe par arcs et localement connexe par arcs (i.e. la topologie possède une base dont les ouverts sont connexes par arcs). Alors il existe un relèvement $\hat{f} : Y \to E$ tel que*

$$\hat{f}(y_0) = e_0 \iff Im\pi_1 f \subseteq \pi_1 p\,.$$

De plus, si $\hat{f}$ existe, alors il est unique.

Exercice 3. a) Prouver l'implication "$\Longrightarrow$" du lemme ci-dessus.
b) Pouver l'unicité du relèvement.
c) ★★ Prouver l'existence du relèvement.

Exercice 4 (1^{er} théorème de classification)**.** Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ des revêtments avec $p(e_0) = b_0 = p'(e_0')$, où E et E' sont des espaces connexes par arcs et localement connexe par arcs. Alors il existe une équivalence $h : E \to E'$ (i.e. un homéomorphisme tel que $p'h = p$) telle que $h(e_0) = e_0'$ si et seulement si $\pi_1 p(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1 p'(\pi_1(E', e_0'))$. De plus, si h existe, alors elle est unique.