Eléments d'homotopie
Prof. Kathryn Hess — Hiver 07

Série 9

Exercice 1. Soit $p : E \to B$ une fibration. Montrer que $p(E)$ est une réunion de composantes connexes par arcs de B.

Exercice 2. Soit $p : E \to B$ une fibration. Montrer que si B est connexe par arcs et qu'il existe un point $b_0 \in B$ tel que $p^{-1}(b_0)$ soit connexe par arcs alors E est connexe par arcs.

Exercice 3. Soient $p : E \to B$ une fibration et $b_0 \in B$ un point dans B. Posons $F = p^{-1}(b_0)$ et $j : F \hookrightarrow E$ l'inlcusion.
Montrer que :
a) si B est simplement connexe alors $\pi_1 j : \pi_1(F, e_0) \to \pi_1(E, e_0)$ est surjectif pour tout $e_0 \in F$.
b) si F est simplement connexe alors $\pi_1 p : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ est un isomorphimse pour tout $e_0 \in F$.
c) si E est simplement connexe alors il existe une bijection

$$\pi_1(B, b_0) \leftrightarrow \{\text{composantes connexes par arcs de } F\}\,.$$

Définition 1. Un *fibré* (E, B, F, p) est composé d'un *espace total* E, d'un *espace de base* B, d'une *fibre* F et d'une *projection* $p : E \to B$ tels qu'il existe un recouvrement ouvert U de B ayant la propriété suivante. Pour tout $U_\alpha \in U$, il existe un homémomorphisme $\varphi_{U_\alpha} : U_\alpha \times F \to p^{-1}(U_\alpha)$ tels que

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[r, "\varphi_{U_\alpha}"] \arrow[rr, bend right, "pr_1"'] & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "p"] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

commute, où pr_1 est la projection sur le premier facteur.

Rappel 1. Un espace topologique X est dit *paracompact* si tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement localement fini.

Proposition 1. *Si (E, B, F, p) est un fibré avec espace de base B paracompact de Hausdorff, alors p est une fibration ([Spanier, p. 96]).*

Exercice 4. En admettant la proposition 1, prouver que :
a) l'application $p : S^n \to \mathbb{R}P^n : z \mapsto [z]$ est une fibration et calculer sa fibre.
b) de manière analogue, $p : S^{n+1} \to \mathbb{C}P^n : z \mapsto [z]$ est une fibration et calculer sa fibre.
c) l'application $S^1 \to T \to S^1$ où le premier S^1 est la fibre et T le tore est un fibré.