

Série 9

Exercice 1. Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration. Montrer que $p(E)$ est une réunion de composantes connexes par arcs de B .

Exercice 2. Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration. Montrer que si B est connexe par arcs et qu'il existe un point $b_0 \in B$ tel que $p^{-1}(b_0)$ soit connexe par arcs alors E est connexe par arcs.

Exercice 3. Soient $p : E \rightarrow B$ une fibration et $b_0 \in B$ un point dans B . Posons $F = p^{-1}(b_0)$ et $j : F \hookrightarrow E$ l'inclusion.

Montrer que :

- si B est simplement connexe alors $\pi_1 j : \pi_1(F, e_0) \rightarrow \pi_1(E, e_0)$ est surjectif pour tout $e_0 \in F$.
- si F est simplement connexe alors $\pi_1 p : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ est un isomorphisme pour tout $e_0 \in F$.
- si E est simplement connexe alors il existe une bijection

$$\pi_1(B, b_0) \leftrightarrow \{\text{composantes connexes par arcs de } F\}.$$

Définition 1. Un *fibré* (E, B, F, p) est composé d'un *espace total* E , d'un *espace de base* B , d'une *fibre* F et d'une *projection* $p : E \rightarrow B$ tels qu'il existe un recouvrement ouvert U de B ayant la propriété suivante. Pour tout $U_\alpha \in U$, il existe un homéomorphisme $\varphi_{U_\alpha} : U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ tels que

$$U_\alpha \times F \xrightarrow{\varphi_{U_\alpha}} p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{p} U_\alpha$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{pr_1}$$

commute, où pr_1 est la projection sur le premier facteur.

Rappel 1. Un espace topologique X est dit *paracompact* si tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement localement fini.

Proposition 1. Si (E, B, F, p) est un fibré avec espace de base B paracompact de Hausdorff, alors p est une fibration ([Spanier, p. 96]).

Exercice 4. En admettant la proposition 1, prouver que :

- l'application $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n : z \mapsto [z]$ est une fibration et calculer sa fibre.
- de manière analogue, $p : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n : z \mapsto [z]$ est une fibration et calculer sa fibre.
- l'application $S^1 \rightarrow T \rightarrow S^1$ où le premier S^1 est la fibre et T le tore est un fibré.