

Homologie et Cohomologie Exercices 10

Exercice 1. Soit

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

une courte suite exacte de groupes abéliens. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe un homomorphisme $h : C \rightarrow B$ tel que $g \circ h = Id_C$.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

- (b) Il existe un homomorphisme $j : B \rightarrow A$ tel que $j \circ f = Id_A$.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

- (c) $B \cong A \oplus C$. Quels sont les morphismes $A \hookrightarrow A \oplus C$ et $A \oplus C \rightarrow C$?

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Exercice 2. Démontrer que pour une courte suite exacte scindée,

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C' \longrightarrow C'' \longrightarrow 0,$$

α_G est compatible au connectant, $\forall G \in \text{Ob} \mathbf{Ab}$, où $\alpha_G : H_*(-) \otimes G \rightarrow H_*(- \otimes G)$.

Exercice 3. Soient A, A', B, B' des groupes abéliens.

- (a) Démontrer que la définition de $Tor(A, B)$ ne dépend pas de la résolution libre de A choisi.
- (b) Démontrer que $Tor(A, B) \cong Tor(B, A)$.
- (c) Démontrer que $Tor(A, B \oplus B') \cong Tor(A, B) \oplus Tor(A, B')$.
- (d) Soit $\varphi \in \mathbf{Ab}(A, A')$, $\psi \in \mathbf{Ab}(B, B')$. Démontrer que φ et ψ induisent un homomorphisme

$$Tor(\varphi, \psi) : Tor(A, B) \rightarrow Tor(A', B')$$

- (e) En utilisant la construction de l'exercice précédente, démontrer que $Tor(-, B) : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est un foncteur.

Exercice 4. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer

- (a) $Tor(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = ?$
- (b) $Tor(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = ?$

Exercice 5. Soit

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E$$

une suite exacte d'homomorphismes de groupes abéliens. Démontrer qu'elle induit une courte suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \text{coker}(f) \longrightarrow C \longrightarrow \text{ker}(k) \longrightarrow 0.$$

Exercice 6. Admettant qu'il existe une équivalence d'homotopie de chaînes, $S_*(X) \otimes S_*(Y) \simeq S_*(X \times Y)$, et en utilisant la formule de Kunneth, calculer

- (a) $H_*(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})$,
- (b) $H_*(S^1 \times S^1 \times S^1, \mathbb{Z})$
- (c) $H_*(T^n, \mathbb{Z})$, où $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, n facteurs.

Exercice 7. Le *théorème des coefficients universels* met en relation l'homologie en coefficients entiers avec l'homologie en coefficient dans un groupe abélien quelconque. Plus précisément : Soient C_* un complexe de chaînes tel que C_n est abélien et libre $\forall n$, et G un groupe abélien. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une courte suite exacte

$$0 \longrightarrow H_n(C_*, \mathbb{Z}) \otimes G \longrightarrow H_n(C_* \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C_*, \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0.$$

Déduire le théorème des coefficients universels de la formule de Kunneth.

Exercice 8. (a) Utiliser le théorème des coefficients universels pour calculer les groupes d'homologie du complexe de chaînes suivant pour des coefficients $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

- (b) Pourquoi est-ce qu'on ne peut pas appliquer le théorème des coefficients universels au complexe de chaînes suivant pour des coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Exercice 9. Trouver un exemple qui montre la nécessité de la condition que " C_n soit abélien libre $\forall n$ " dans la formule de Kunneth.