

Homologie et Cohomologie Exercices 2

Exercice 1. Soit \mathbf{Cat} la catégorie des petites catégories : les objets sont les petites catégories et les morphismes sont les foncteurs entre les catégories. Vérifier les axiomes d'une catégorie.

Exercice 2. Soient \mathbf{C} et \mathbf{D} deux petites catégories. Vérifier les axiomes d'une catégorie pour les catégories suivantes.

- (a) La **catégorie des flèches** $\mathbf{C}^\rightarrow : Ob\mathbf{C}^\rightarrow = Mor\mathbf{C}$ et $\forall f \in \mathbf{C}(A, B), \forall g \in \mathbf{C}(C, D), \mathbf{C}^\rightarrow(f, g) = \{(a, b) \in (\mathbf{C}(A, C), \mathbf{C}(B, D)) : bf = ga\}$, i.e., le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ C & \xrightarrow{g} & D. \end{array}$$

- (b) Pour un $A \in Ob\mathbf{C}$ fixé, la **catégorie slice** \mathbf{C}/A : $Ob\mathbf{C}/A = \{(X, f) \in Ob\mathbf{C} \times Mor\mathbf{C} : \text{but de } f = A\}$ et

$\mathbf{C}/A((X, f), (Y, g)) = \{a \in \mathbf{C}(X, Y) : f = ga\}$, i.e., le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & A \end{array}$$

Qu'est-ce que tu penses pourrait être la catégorie $A \setminus \mathbf{C}$?

- (c) La **catégorie produit** $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ avec $Ob(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = Ob(\mathbf{C}) \times Ob(\mathbf{D})$ et $Mor(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = Mor(\mathbf{C}) \times Mor(\mathbf{D})$.
- (d) La **catégorie des foncteurs** $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$ possède comme objets les foncteurs $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ et comme morphismes les transformations naturelles entre les foncteurs.

Exercice 3. (a) Trouver un foncteur $\mathbf{C}/A \rightarrow \mathbf{C}^\rightarrow$.

(b) Trouver une catégorie \mathbf{D} tel que $\mathbf{C}^{\mathbf{D}} = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

(c) Trouver une catégorie \mathbf{D} tel que $\mathbf{C}^{\mathbf{D}} = \mathbf{C}^\rightarrow$.

(d) Définir des foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times \mathbf{D} & \xrightarrow{p_1} & \mathbf{C} \\ p_2 \downarrow & & \\ \mathbf{D} & & \end{array}$$

et montrer que pour tout couple de foncteurs $F : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{C}$ et $G : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}$, il existe un unique foncteur $U : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{E} & & & & \\ & \searrow & & & \searrow \\ & & \mathbf{C} \times \mathbf{D} & \xrightarrow{p_1} & \mathbf{C} \\ & \swarrow & & & \swarrow \\ & & \mathbf{D} & & \\ & \swarrow & & & \swarrow \\ \mathbf{E} & & & & \end{array}$$

$\begin{array}{l} \text{Arrows: } \mathbf{E} \xrightarrow{F} \mathbf{C}, \mathbf{E} \xrightarrow{G} \mathbf{D}, \mathbf{E} \xrightarrow{\exists! U} \mathbf{C} \times \mathbf{D} \end{array}$

- (e) Soit $Cst : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{D}}$, $c \mapsto Cst(c)$ tel que $Cst(c)(d) = c \quad \forall d \in \text{Ob}\mathbf{D}$ et $Cst(c)(f) = id_c \quad \forall f \in \text{Mor}\mathbf{D}$. Montrer que Cst est bien un foncteur.
- (f) * Soit $R : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{D}^{op}}$, $d \mapsto \mathbf{D}(-, d)$, \mathbf{D} une catégorie. Montrer que R est bien un foncteur.

Exercice 4. Soient A, B des groupes abéliens.

- (a) Démontrer que pour A fixé, $A \otimes - : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$, $B \mapsto A \otimes B$ est bien un foncteur.
- (b) Démontrer que pour A fixé, $Hom(A, -) : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$, $B \mapsto Hom(A, B)$ et $Hom(-, A) : \mathbf{Ab}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$, $B \mapsto Hom(B, A)$ sont bien des foncteurs.

Exercice 5. Démontrer que le graphe dirigé suivant avec deux objets et trois morphismes autres que les identités, n'est pas une catégorie.

