Homologie et Cohomologie Exercices 3

Exercice 1. Pour un groupe abélien A, soit $(-\otimes A) : \mathbf{Ch}_* \to \mathbf{Ch}_*$ defini par $(C_*, d) \otimes A = (\{C_n \otimes A\}_{n\in\mathbb{N}}, d \otimes id)$, où $(d\otimes id)_n = d_n \otimes id : C_n \otimes A \to C_{n-1} \otimes A$.
En plus, pour $f_* = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un morphisme entre deux complexes de chaînes, alors $f_* \otimes A = \{f_n \otimes id\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Demontrer que $(-\otimes A)$ est bien un foncteur.
Calculer les produits tensoriels des complexes de chaînes suivants avec $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

(a)
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(b)
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(c)
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(d)
$$\cdots \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(e)
$$\cdots \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Exercice 2. Un **complexe de cochaînes** (C^*, d) est une collection de groupes abéliens $C^* = \{C^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ munie d'homomorphismes $d = \{d_{n+1} \in \mathbf{Ab}(C^n, C^{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $d^{n+1} \circ d^n = 0 \ \forall n \geqslant 1$.

(a) Donner des examples de complexes de cochaînes.
(b) Définir des morphismes entre deux complexes de cochaînes d'une manière analogue aux morphismes de complexes de chaînes, tel qu'on obtient une catégorie $\mathbf{Ch}^*$ de complexes de cochaînes.

Exercice 3. Soit $Hom(-, A) : \mathbf{Ch}_* \to \mathbf{Ch}^*$ defini par $Hom\big((C_*, d), A\big) = \big(\{Hom(C_n, A)\}_{n\in\mathbb{N}}, d^*\big)$, où $d^{n+1} : Hom(C_n, A) \to Hom(C_{n+1}, A)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ d_{n+1}$.
En plus, si $f_* : (G_*, d_G) \to (H_*, d_H)$, alors

$$Hom(-, A)(f_*) : Hom\big((H_*, d_H), A\big) \to Hom\big((G_*, d_G), A\big)$$

,

$$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{h_n \circ f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

.

(a) Demontrer que $Hom(-, A)$ est bien un foncteur.
(b) Calculer les $Hom(-, A)$ des complexes des chaînes de l'exercice 1 pour $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Exercice 4. Dans le diagramme suivant, soient les lignes exactes et $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ des isomorphismes. Demontrer que γ est aussi un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

Exercice 5. (a) Définir un foncteur $(- \otimes -) : \mathbf{grAb} \times \mathbf{grAb} \to \mathbf{grAb}$.
Important : Le foncteur doit respecter la graduation.

(b) Définir un foncteur $(- \otimes -) : \mathbf{Ch}_* \times \mathbf{Ch}_* \to \mathbf{Ch}_*$. Indication : Utiliser (a).