Homologie et Cohomologie Exercices 4

Exercice 1. Soit G un groupe abélien, p une premier. Calculer les groupes d'homologie des complexes de chaînes suivants et donner des morphismes nontrivials entre les complexes de (a) à (e).

(a)
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(b)
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(c)
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(d)
$$\cdots \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(e)
$$\cdots \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(f)
$$\cdots \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(g)
$$\cdots \xrightarrow{\cong} G \xrightarrow{0} G \xrightarrow{\cong} G \xrightarrow{0} G \longrightarrow 0$$

(h)
$$\cdots \xrightarrow{0} G \xrightarrow{0} G \xrightarrow{0} G \xrightarrow{0} G \longrightarrow 0$$

(i)
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

Exercice 2. Appliquer $(-\otimes G)$ et $Hom(-, G)$ aux complexes de chaînes correspondantes de l'exercice précédante et calculer les groupes de homologie et cohomologie correspondants pour les groupes G suivants.

(a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(e) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(f) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$

Exercice 3. Donner deux complexes de chaînes qui ne sont pas homotopes mais dont les groupes d'homologie sont isomorphes.

Exercice 4. La somme directe $(C_*, d) \oplus (C'_*, d')$ de deux complexes de chaîne est definie par $(C_* \oplus C'_*)_n = C_n \oplus C'_n$ et $(d \oplus d')_n = d_n \oplus d'_n$.
Demontrer que $H_*((C_*, d) \oplus (C'_*, d')) \cong H_*(C_*, d) \oplus H_*(C'_*, d')$.

Exercice 5. Etant donné une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow (C_*, d) \xrightarrow{f} (C'_*, d') \xrightarrow{g} (C''_*, d'') \longrightarrow 0 \, ,$$

demontrer qu'il existe une suite exacte

$$H_n(C_*, d) \xrightarrow{H_n f} H_n(C'_*, d') \xrightarrow{H_n g} (C''_*, d'') \, .$$

Exercice 6. Soit le foncteur $B : \underline{Gr} \longrightarrow \underline{Ch}$ défini comme suit :
$BG = (B_*G, d)$, oú

$$B_nG = \begin{cases} \mathbb{Z}\left[G^{\times n}\right] & \text{pour } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{pour } n < 1 \end{cases}$$

$d_n : B_nG \longrightarrow B_{n-1}G$
$(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (x_1, ..., x_i x_{i+1}, ..., x_n) + (-1)^n (x_1, ..., x_{n-1})$

(a) Montrer que BG est un complex de chaînes.
(b) Expliquer comment définir $B\varphi$, oú $\varphi \in \underline{Gr}(G, G')$.
(c) Demontrer que B est bien un foncteur.
(d) Calculer $H_*(B\{e\}, \mathbb{Z})$ et $H_*(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.