Homologie et Cohomologie Exercices 5

Exercice 1. Compléter la démonstration qu'il existe une longue suite exacte en homologie provenant d'une suite exacte courte de complexes de chaînes.

Exercice 2. $BG_\bullet$ est un cas spécial de la construction du nerf d'une petite catégorie. Le nerf $BG_\bullet$ de G est l'ensemble simplicial avec les n-simplices égal á l'ensemble des chaînes des morphismes composables. Dans ce cas, les n-simplexes sont l'ensemble des diagrammes

$$* \xrightarrow{g_1} * \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_n} * \,.$$

Autrement dit, $BG_n \cong G^{\times n}$.

(a) Vérifier que $BG_\bullet$ est bien un ensemble simplicial.

(b) Décrire les simplexes non dégénérés de $BG_\bullet$.

(c) Exprimer les faces et les dégénéréssences de $BG_\bullet$ par des diagrammes.

(d) Généraliser la construction du nerf aux petites catégories arbitraires. Quelles sont les simplexes, les faces et les dégénéréssences ?

Exercice 3. Vérifier les identités simpliciales pour $\triangle[n]$.

Exercice 4. Démontrer que $\mathbf{Set}^{\triangle^{op}} \cong \mathbf{sSet}$.

Exercice 5. La **réalisation géometrique** d'un ensemble simplicial $K_\bullet$ est l'espace topologique

$$|K_\bullet| = \coprod_{n \geqslant 0} K_n \times \Delta^n / \sim$$

où $\quad (d_i x, t) \sim (x, \delta^i t) \ \forall x \in K_{n+1},\ t \in \Delta^n$

et $\quad (s_i y, t) \sim (y, \sigma^i t) \ \forall y \in K_{n-1},\ t \in \Delta^n, \qquad t = (t_0, ..., t_n).$

En plus,

- tout K_n est muni de la topologie discrète,
- tout Δ^n est muni de la topologie usuelle,
- tout $K_n \times \Delta^n$ est muni de la topologie produit, et
- $|K_\bullet|$ est muni de la topologie quotient.

(a) Démontrer que $| - |$ s'étend en un foncteur **sSet** $\longrightarrow$ **Top**.

(b) Démontrer qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\mathbf{sSet}(K_\bullet, S_\bullet(Y)) \cong \mathbf{Top}(|K_\bullet|, Y)$$

$\forall K_\bullet \in Ob\, \mathbf{sSet}$, $\forall Y \in Ob\, \mathbf{Top}$.