

Homologie et Cohomologie Exercices 6

Exercice 1. (a) Expliquer pourquoi $\partial\Delta[3]$ et $\Delta[2]/\partial\Delta[2]$ sont des modèles simpliciaux de S^2 .

(b) Donner un modèle simplicial de $S^1 \vee S^1$.

Exercice 2. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ et $f \in \Delta([m], [n])$. Démontrer que f peut être factorisé uniquement comme composition

$$f = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_s} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_r}$$

où $0 \leq i_s < \dots < i_1 \leq n$, $0 \leq j_1 < \dots < j_r < m$ et $m - r + s = n$.

Exercice 3. Un ensemble simplicial K_\bullet est un **complexe de Kan** si $\forall f \in \underline{sSet}(\Lambda^k[n], K_\bullet)$, $\exists \hat{f} \in \underline{sSet}(\Delta[n], K)$, tel que

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \xrightarrow{f} & K \\ \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\ \Delta[n] & & \end{array}$$

commute.

Explicitement, ça veut dire que $\forall \{x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\} \subset K_{n-1}$, tel que $d_i x_j = d_{j-1} x_i \forall i < j, i, j \neq k$, $\exists y \in K_n$, tel que $d_i y = x_i \forall i \neq k$.

Démontrer que l'ensemble simplicial singulier $S_\bullet(X)$ d'un espace topologique quelconque X est un complexe de Kan et que $\Delta[n]$ n'est pas un complexe de Kan.

Exercice 4. Démontrer que $S_\bullet(X \times Y) \cong S_\bullet(X) \times S_\bullet(Y)$ pour tout couple d'espaces topologiques X et Y .

Exercice 5. Soient K_\bullet et L_\bullet des ensembles simpliciaux. L'ensemble gradué sous-jacent à l'ensemble simplicial fonctionnel $Map(K_\bullet, L_\bullet)$ vérifie

$$Map(K_\bullet, L_\bullet)_n = \underline{sSet}(K_\bullet \times \Delta[n], L_\bullet).$$

(a) Donner des formules explicites pour les faces et les dégénérescences et expliquer pourquoi les identités simpliciales sont vérifiées.

(b) Définir un morphisme de "composition"

$$Map(K_\bullet, L_\bullet) \times Map(L_\bullet, M_\bullet) \longrightarrow Map(K_\bullet, M_\bullet)$$

qui étend

$$\underline{sSet}(K_\bullet, L_\bullet) \times \underline{sSet}(L_\bullet, M_\bullet) \longrightarrow \underline{sSet}(K_\bullet, M_\bullet).$$