

Homologie et Cohomologie Exercices 7

Exercice 1. Démontrer que le nerf \mathcal{NC} d'une catégorie \mathbf{C} satisfait la condition de Kan pour les cornes internes, i.e. pour $\Lambda^k[n]$, où $0 < k < n$.

Indication : commencer par $n = 2$.

Exercice 2. (a) Soit G_\bullet un groupe simplicial. Démontrer que G_\bullet est un complexe de Kan.

(b) Soit K_\bullet un ensemble simplicial réduit. Soit $G_n(K_\bullet)$ le groupe libre engendré par les éléments de K_{n+1} avec l'identification $s_0x = e_n$ pour $x \in K_n$, où e_n est l'élément neutre de $G_n(K_\bullet)$. Les faces et les dégénérescences sont les morphismes précisés par

$$\begin{aligned} - d_0\bar{x} &= \overline{d_0x}^{-1} \cdot \overline{d_1x}, \\ - d_i\bar{x} &= \overline{d_{i+1}x}, \text{ si } i > 0, \text{ et} \\ - s_i\bar{x} &= \overline{s_{i+1}x}, \text{ si } i \geq 0, \end{aligned}$$

où \bar{x} désigne la classe de $x \in K_{n+1}$ dans $G_n(K_\bullet)$.

Démontrer que $G_\bullet(K_\bullet)$ vérifie les identités simpliciales.

Exercice 3. Soit K_\bullet un ensemble simplicial et soit $(D_*(K_\bullet), \hat{d})$ le complexe des chaînes qui, en degré n , est le group abélien libre engendré par les n -simplexes dégénérés.

Démontrer que $H_*(D_*(K_\bullet), \hat{d}) = 0$.

Exercice 4. Rappel : Le n -simplexe topologique Δ^n est défini comme suit :

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}.$$

Un **complexe simplicial fini** dans \mathbb{R}^N est un sous-espace qui est la réunion d'un ensemble fini de n -simplexes topologiques qui vérifie les deux conditions suivantes.

- Les faces de tous les simplexes appartiennent également à l'ensemble.
- L'intersection de deux simplexes du complexe simplicial (si elle n'est pas vide) est une face des deux simplexes.

Un **complexe simplicial ordonné** est un complexe simplicial satisfaisant les conditions supplémentaires suivantes. Pour chacun des simplexes, un ordre total des sommets est choisi. De plus, les sommets d'une face sont munis avec l'ordre induit.

Autrement dit, dans un complexe simplicial ordonné, tous les n -simplexes peuvent être écrits comme (v_0, \dots, v_n) , où v_0, \dots, v_n sont les sommets.

Un complexe simplicial ordonné induit un **complexe simplicial abstrait** : X_n est l'ensemble des simplexes de dimension n . Pour tout i entre 0 et n définissons une application

$$d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}$$

$$(v_0, \dots, v_n) \mapsto (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n).$$

Soit $\mathcal{X} = (X_n, d)$. La réalisation géométrique $|\mathcal{X}|$ d'un complexe simplicial abstrait \mathcal{X} est défini comme suit.

$$|\mathcal{X}| = \coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n / \sim$$

où $(d_i x, t) \sim (x, \delta^i t) \forall x \in X_{n+1}, t \in \Delta^n$.

On peut associer un ensemble simplicial K_\bullet à un complexe simplicial abstrait \mathcal{X} . Notons cette association comme $A : \mathcal{X} \rightsquigarrow K_\bullet$. Les n -simplexes de K_\bullet sont les paires

$$(y, \sigma)$$

où $\sigma : [n] \mapsto [m]$ sont tous les applications surjectives avec source $[n]$ et y les éléments de X_m , m variable.

Les faces et les dégénérescences sont définies comme suit.

$$d_i(y, id_{[n]}) = (d_i y, id_{[n-1]})$$

pour les n -simplexes nondégénérés de K_\bullet et

$$s_i(y, \sigma) = (y, \sigma \tilde{\sigma}_i)$$

pour un simplexe $(y, \sigma) \in K_n$ quelconque et une dégénérescence $\tilde{\sigma}_i : [n+1] \rightarrow [n]$.

Remarque : Les faces des simplexes dégénérés de K_\bullet sont plus compliquées à écrire. Pour cet exercice, il suffit de connaître celles données.

- (a) Définir les morphismes des complexes simpliciaux abstraits pour obtenir la catégorie **CSpl** des complexes simpliciaux abstraits.
- (b) Démontrer que A est bien un foncteur.
- (c) Démontrer que $|\mathcal{X}| \cong |A(\mathcal{X})|$.
- (d) Donner des complexes simpliciaux qui modèlent le cylindre, le ruban de Moebius, le tore, la bouteille de Klein et le plan projectif.