Homologie et Cohomologie Exercices 8

Exercice 1. (a) Calculer $H_*(S^1 \times S^1)$ et $H_*(S^1) \otimes H_*(S^1)$. Utilise ton modèle simplicial de S^1 préféré .

(b) Calculer $H_*\big(\mathcal{N}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathcal{N}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$ et $H_*\big(\mathcal{N}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big) \otimes H_*\big(\mathcal{N}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big)$.

Exercice 2. Calculer $H_*(\Delta[n])$, $H_*(\partial\Delta[n])$ et $H_*(\Delta[n]/\partial\Delta[n])$.

Exercice 3. Soit la **suspension simplicial** $EK_\bullet$ d'un ensemble simplicial $K_\bullet$ défini comme suit :
$E_0(K) = b_0$ et $E_n(K)$ est l'ensemble des paires (i, x), où $i \geqslant 1$ est une nombre entier et $x \in K_{n-i}$.
Les faces et les dégénéréscences sont engendrées par :
- $d_0(1, x) = b_n$ pour tout $x \in K_n$, où $b_n = s_0^n b_0$,
- $d_1(1, x) = b_0$ pour tout $x \in K_0$,
- $d_{i+1}(1, x) = (1, d_i x)$ pour tout $x \in K_n, n > 0$,
- $s_0(i, x) = (i + 1, x)$ et
- $s_{i+1}(1, x) = (1, s_i x)$.

Les autres faces et dégénéréscences sont definies par la condition que $EK_\bullet$ soit un ensemble simplial.

Démontrer que $H_*K_\bullet \cong H_{*+1}EK_\bullet$.

Exercice 4. (a) Expliquer comment on peut associer un complexe de chaînes $Ch_*(\mathcal{X})$ à un complexe simplicial abstrait $\mathcal{X} = (X_n, d)$ tel que $Ch_*(\mathcal{X}) = NC_*(K_\bullet)$, $K_\bullet$ étant l'ensemble simplicial associé à $\mathcal{X}$.

(b) Calculer les groupes d'homologie des surfaces de la série précédente.