

Homologie et Cohomologie Exercices 9

Exercice 1. Montrer que $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus n}$, où $n =$ nombre de composantes connexes de X .

Exercice 2. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement tel que $|p^{-1}(b)| < \infty \forall b \in B$, B connexe par arcs. Montrer que si $H_1(E) = 0$, alors tout élément de $H_1(B)$ est d'ordre fini.

Indication :

- (a) Construire le *transfert* $\tau : H_1(B) \rightarrow H_1(E)$ en utilisant relèvement unique de chemins.
- (b) Montrer que $(p_* \circ \tau)(x) = mx$, où $m = |p^{-1}(b)|$.
- (c) Conclure.

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$ si $m \neq n$.

Exercice 4. Calculer, en utilisant la longue suite exacte de Mayer-Vietoris, $H_*(\mathbb{S}_\bullet^2)$, où \mathbb{S}_\bullet^2 est défini par le push-out

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta[2] & \hookrightarrow & \Delta[2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[2] & \longrightarrow & \mathbb{S}_\bullet^2 \end{array}$$

Exercice 5. Calculer $H_*(X \vee Y)$, où le point de base admet un voisinage ouvert dans $X \vee Y$.

Exercice 6. (a) Soit $f : X \rightarrow Y$. Quelle est une longue suite exacte appropriée pour calculer $H_*(\text{Cône}(f))$?

- (b) Démontrer que $H_*(\Sigma X) \cong H_{*-1}(X)$ et que l'isomorphisme est naturel en X .
- (c) Calculer $H_*(\mathbb{C}P^2)$.

Indication : Référez vous à l'exercice 1c) de la série 8 du cours *Elements d'homotopie* du semestre passé : $\mathbb{C}P^2 = \text{Cône}(p)$.

Exercice 7. (a) Soit $p \in \mathbb{Z}$ et soit $\lambda_p : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^p$. Démontrer que $H_*(\lambda_p)(x) = px$, i.e., c'est une multiplication par p .

- (b) Conclure que $H_*(\Sigma^{n-1}\lambda_p) : S^n \rightarrow S^n, y \mapsto py$, i.e., c'est aussi une multiplication par p .
- (c) Posons $M(p, n) := \text{Cône}(\Sigma^{n-1}\lambda_p)$. Calculer $H_*(M(p, n))$.