INVARIANTS TOPOLOGIQUES ET HOMOTOPIQUES

Lorque l'on fait des mathématiques, on rencontre souvent des *problèmes de classification*. Etant donné une relation d'équivalence raisonnable sur un ensemble d'objets intéressants (e.g., des fonctions analytiques, des graphes, des nœuds, etc.), on essaie de déterminer les classes d'équivalence des objets selon la relation donnée. Ce genre de problème s'avère en général difficile à résoudre. Il faut donc trouver des astuces pour faciliter la tâche.

Le but de la topologie algébrique est de résoudre des problèmes topologiques, dont la classification des espaces topologiques, en les transférant dans un cadre algébrique. Il y a deux relations d'équivalence raisonnables à considérer dans ce contexte. D'abord, deux espaces topologiques X et Y sont *topologiquement équivalents*, que l'on dénote $X \cong Y$, s'il existe un homéomorphisme $h : X \to Y$. Un *invariant topologique* $\mathcal{I}$ associe à tout espace un "truc algébrique" (e.g., groupe, polynôme, matrice, etc.) d'un type fixe, de telle manière à ce que

$$X \cong Y \Longrightarrow \mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y).$$

L'invariant $\mathcal{I}$ est *parfait* si, de plus,

$$\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y) \Longrightarrow X \cong Y.$$

En général les invariants sont loin d'être parfaits. Mais nous savons au moins que

$$\mathcal{I}(X) \neq \mathcal{I}(Y) \Longrightarrow X \ncong Y.$$

Nous pouvons donc utiliser un invariant topologique comme une espèce de papier tournesol, qui ne nous dit pas tout, mais qui nous permet au moins de faire un premier tri.

Souvent les topologues s'intéressent à une classification moins fine mais tout aussi intuitive des espaces topologiques. Dans la définition suivante nous donnons la relation d'équivalence qui est à la base de cette classification.

DÉFINITION. Deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont *homotopes*, que l'on dénote $f \simeq g$, s'il existe une application $H : X \times [0,1] \to Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. L'application H s'appelle une *homotopie* de f à g.

Deux espaces X et Y ont le *même type d'homotopie*, que l'on dénote $X \simeq Y$, s'il existe des applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $gf \simeq 1_X$ et $fg \simeq 1_Y$. Les applications f et g s'appelent des *équivalences homotopiques*. Tout espace ayant le même type d'homotopie que le point est dit *contractile*.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Un *invariant homotopique* associe à chaque espace un “truc algébrique” (e.g., groupe, polynôme, matrice, etc.) d'un type fixe, de telle manière à ce que

$$X \simeq Y \Longrightarrow \mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y).$$

L'invariant $\mathcal{I}$ est *parfait* si, de plus,

$$\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y) \Longrightarrow X \simeq Y.$$

Il est facile de voir que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble

$$\{f : X \to Y, \quad \text{continue}\}$$

pour tout X et Y, ainsi que sur l'ensemble de tous les espaces topologiques. D'ailleurs il est clair que

$$X \cong Y \Longrightarrow X \simeq Y.$$

Tout invariant homotopique est donc un invariant topologique.