

Série 8

9 décembre 2004

1.

Admettons le résultat suivant :

$$\pi_1(S^n) = 0 \text{ si } n \geq 2.$$

(i) Calculer $\pi_1(\mathbb{R}^n - \{x\})$.

(ii) Montrer que \mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^n , si $n \neq 2$.

2.

Calculer l'ordre du groupe $|\{a, b\} : r|$ où $r = \{a^4, a^2b^{-2}, a^3ba^{-1}b^{-1}\}$.

3.

Peut-on exprimer le groupe présenté par $|\{a, b\} : r|$, où $r = \{a^4, b^2, aba^{-1}b^{-1}\}$, comme une somme de groupes cycliques ?

4.

Admettons le résultat suivant :

Théorème. (*Nielsen-Schreier*)

Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

(i) Montrer qu'un groupe libre ne contient aucun élément d'ordre fini.

(ii) Montrer que si deux éléments d'un groupe libre commutent, alors chacun d'eux est une puissance d'un troisième élément.

5.

Combien d'homomorphismes $f : \mathcal{F}(x, y) \rightarrow \mathbb{Z}/4$ existe-t-il ?