UN OUVERT BIZARRE

Soit X un schéma noethérien et U un ouvert de X. Est-ce que l'anneau $\Gamma(U)$ des fonctions régulières sur U est noethérien?

Il est très facile de démontrer qu'il n'en est rien, du moins si on n'est pas très exigent sur les propriétés de X.

Soit A et B deux plans projectifs de $\mathbb{P}^3_k$ qui se coupent en une droite L et soit $X = A \cup B$. Soit D une droite de A, différente de L et qui coupe L en P. Soit U le complémentaire de D dans X. Comme U est un sous-schéma ouvert de X, il est noethérien. Tout $f \in \Gamma(U)$ étant constant sur $B \setminus D = B \setminus \{P\}$, sa restriction au plan affine $A_0 = A \setminus D$ est constante sur $L_0 = A_0 \cap L$. D'autre part, si f est une fonction régulière sur A_0 qui est égale à une constante c sur L_0, on voit sans peine qu'elle s'étend en une fonction régulière sur U. L'anneau $\Gamma(U)$ est donc isomorphe à l'anneau R des polynômes $f(x,y) \in k[x,y]$ tels que $f(x,0)$ est constant. Ces polynômes sont exactement ceux de la forme $c + g(x,y)$ avec $c \in k$ et $g(x,y) \in yk[x,y]$. Comme k-algèbre R est engendré par les monômes $x^m y^{1+n}$ où $m,n \geq 0$. L'idéal $I \subset R$ des polynômes qui s'anullent sur la droite $y = 0$ est engendré par ces mêmes monômes. Il est clair que l'idéal engendré par un nombre fini de monômes, disons $x^m y^{1+n}$ avec $m,n \leq N$ ne contient pas $x^{N+1}y$. L'anneau R n'est donc pas noethérien. Par conséquent *U est un schéma quasi-projectif — en particulier noethérien — dont l'anneau des fonctions régulières n'est pas noethérien.*

Si on demande que X soit une variété projective intègre et lisse, on trouve, grâce au contre-exemple de Nagata qui répond au quatorzième problème de Hilbert, des exemples pour lesquels $\Gamma(U)$ n'est pas une algèbre affine, mais je ne sais pas s'il est noethérien.