C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 326 (1998), no. 10, 1185–1187.

Sur la non résolubilité du p-laplacien sur $\mathbb{R}^n$

V. Gol'dshtein et M. Troyanov

13 mai 1998

Résumé Dans cette note on démontre l'impossibilité de résoudre l'équation du $p-$laplacien $\Delta_p u + h = 0$ dans certains espaces fonctionnels lorsque la fonction h est de moyenne non nulle.

On the non Solvability of the $p-$Laplacian on $\mathbb{R}^n$

Summary In this note we prove the impossibility to solve the $p-$Laplace equation $\Delta_p u + h = 0$ in certain function spaces when the function h has a non zero average.

On note $\mathcal{L}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ admettant un gradient au sens des distributions de classe L^p.

Le $p-$laplacien est l'opérateur $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est solution faible de l'équation $\Delta_p u + h = 0$ si

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle |\nabla f|^{p-2}\, \nabla f, \nabla \psi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} h\, \psi$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (où ∇f est le gradient au sens des distributions de f).

Le but de cette note est de démontrer le résultat suivant

Théorème 1 *Soit $2 \leq n \leq p < \infty$, et soit h une fonction de classe L^1 sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} h \neq 0$. Alors l'équation*

$$\Delta_p u + h = 0 \tag{1}$$

n'admet aucune solution faible dans $\mathcal{L}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque Ce théorème donne une réponse à la remarque 4.4 de l'article de Drábek [1].

Pour la démonstration du théorème, on utilisera la notion de $p-$capacité d'un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$, que l'on peut définir par

$$\mathrm{Cap}_p(K) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p : u \in C_0^1(\mathbb{R}^n),\ 0 \le u \le 1 \text{ et } u \equiv 1 \text{ sur } K \right\}.$$

Lemme *La p-capacité de tout compact de $\mathbb{R}^n$ est nulle si $p \ge n \ge 2$.*

Pour prouver ce lemme il suffit de calculer explicitement la $p-$capacité d'une boule dans $\mathbb{R}^n$ (voir par exemple le paragraphe 2.2.4 de [2]).

□

Démonstration du théorème 1

Supposons $\int_{\mathbb{R}^n} h > 0$. Alors on peut trouver un ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^n$ de mesure positive et tel que

$$\gamma := \inf_D h > 0 \qquad \text{et} \qquad \int_D h > \left| \int_{\mathbb{R}^n} h^- \right|$$

où $h^- := min\{h, 0\}$. Choisissons $0 < c < 1$ tel que

$$0 \le - \int_{\mathbb{R}^n} h^- < c \cdot \int_D h\,.$$

Pout tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $v \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ telle que
$0 \le v \le 1$, $v \equiv 1$ sur $\overline{D}$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p \le \mathrm{Cap}_p(\overline{D}) + \varepsilon\,.$$

On a donc $-c \int_D v\,h < \int_{\mathbb{R}^n} v\,h^- \le 0$, par conséquent

$$\begin{aligned}(1-c) \cdot \int_D v\,h \quad &< \quad \int_D v\,h + \int_{\mathbb{R}^n} v\,h^- \\ &< \quad \int_D v\,h + \int_{\mathbb{R}^n} v\,h^- + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus D)} v\,h^+ = \int_{\mathbb{R}^n} v\,h\,.\end{aligned}$$

Or $\gamma \,\mathrm{Vol}(D) \leq \int_D v\, h$; on a donc montré que

$$(1-c)\cdot \gamma \,\mathrm{Vol}(D) \leq \int_{\mathbb{R}^n} v\, h\,. \tag{2}$$

Supposons à présent que $u \in \mathcal{L}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ soit une solution de (1), et posons $\xi := -|\nabla u|^{p-2}\nabla u$. Alors ξ est un champ de vecteurs tel que $|\xi| \in L^q(\mathbb{R}^n)$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $\mathrm{div}(\xi) = -\Delta_p u = h$.

Une integration par parties et l'inégalité de Hölder appliqué à l'inégalité (2) nous donnent

$$\begin{aligned} \gamma(1-c)\cdot \mathrm{Vol}(D) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} v\, \mathrm{div}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla v, \xi \rangle \\ &\leq \|\xi\|_q \, \|\nabla v\|_p\,. \end{aligned}$$

Comme $\|\nabla v\|_p \leq (\mathrm{Cap}_p(\overline{D})+\varepsilon)^{1/p}$ et ε est arbitraire, on conclut que

$$0 < \mathrm{Vol}(D) \leq \frac{\|\xi\|_q}{\gamma(1-c)} \cdot (\mathrm{Cap}_p(\overline{D}))^{1/p}\,.$$

Par le lemme, on sait que ceci est impossible pour $p \geq n$.

$\square$

Remarquons que le lemme (et donc le théorème) est encore vrai pour $n = 1, p > 1$. Plus généralement, la même méthode permet de démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 2 *Soient $n \geq 2$, et $1 \leq \frac{s}{p-1} \leq \frac{n}{n-1}$. Si h une fonction de classe L^1 sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} h \neq 0$. Alors l'équation 1 n'admet aucune solution faible dans $\mathcal{L}^{1,s}(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 3 *Supposons que M est p-parabolique, et soit $h \in L^1(M)$ une fonction telle que $\int_M h \neq 0$. Alors l'équation $\Delta_p u + h = 0$ n'a pas de solution faible $u \in \mathcal{L}^{1,p}(M)$.*

$\square$

Les variétés $p-$paraboliques sont celles pour lesquelles $\mathrm{Cap}_p(D) = 0$ pour tout compact $D \subset M$, voir [3].

References

[1] Pavel Drábek *Nonlinear Eigenvalue Problem for p−Laplacian in* $\mathbb{R}^n$ Math.Nach **173** (1995) 131–139).

[2] V.G. Maz'ya *Sobolev Spaces* Springer Verlag (1985)

[3] M. Troyanov *Parabolicity of Manifolds* Préprint EPFL, 1997

Marc Troyanov
Département de Mathématiques
E.P.F.L.
CH-1015 Lausanne (Switzerland)
troyanov@math.epfl.ch

Vladimir Gol'dshtein
Departement of Mathematics
Ben Gurion University of The Negev
P.O. Box 653, 84105 Beer Sheva (Israel)
vladimir@bgumail.bgu.ac.il