

L'horizon de SOL

Marc Troyanov - EPFL

Exposition. Math. 1998 vol. 16 (5) pp. 441-479

Summary

The goal of this paper is to give an explicit analysis of the geodesic flow on the three dimensional Lie group SOL. In particular we describe its horizon. (The horizon of a riemannian manifold is a topological space parametrizing the asymptotic classes of geodesic rays.)

We begin the paper by a brief exposition of some known results about the asymptotic behaviour of the geodesics in manifolds of negative and positive curvature. Sections two and three present the necessary notions of SOL geometry and the equations of the geodesics are integrated in section 4. In Section 5, we classify the geodesics in three types according to their geometric behaviour (reflecting the non isotropic character of SOL geometry) and in Section 6 we finally compute the horizon.

1 Introduction

Le thème général de cet article est l'étude du comportement à l'infini des géodésiques d'une variété riemannienne complète M .

Notre introduction est consacrée à un exposé (forcément superficiel s'agissant d'un aussi vaste sujet) de quelques résultats récents et classiques dans ce domaine. Le reste de l'article est une étude détaillée du cas d'un groupe de Lie résoluble.

1.1 Le flot géodésique

On note $G(M)$ l'ensemble des géodésiques de la variété complète M . Rappelons qu'une géodésique est déterminée par son vecteur initial, il y a donc une identification naturelle de $G(M)$ avec le fibré tangent à la variété :

$$G(M) \simeq TM,$$

En particulier $G(M)$ est également une variété. Soit $\gamma \in G(M)$; à tout réel s , on peut associer une nouvelle géodésique $\gamma_s \in G(M)$ définie par $\gamma_s(t) := \gamma(t + s)$. Cela définit une action de \mathbb{R} sur $G(M)$ qu'on appelle le *flot géodésique* de M .

La métrique riemannienne nous permet aussi d'identifier $G(M)$ avec le fibré cotangent T^*M , et par là d'obtenir une structure symplectique $\omega = d\alpha$ sur $G(M)$ où α est la 1-forme canonique (de Liouville) sur le cotangent.

L'importance de cette structure symplectique vient de la relation suivante : Pour tout vecteur tangent $Y \in TG(M)$, on a

$$dH(Y) = \omega(Y, X)$$

où X est le champ de vecteurs sur $G(M)$ engendrant le flot géodésique et $H : G(M) \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $H(v) := \frac{1}{2}\|v\|^2$.

On exprime cela en disant que le flot géodésique est un flot hamiltonien. La fonction H est une intégrale première (les géodésiques sont parcourues à vitesse constante) et le flot préserve donc la variété de niveau $U(M) = H^{-1}(\frac{1}{2})$ (que l'on interprète comme le fibré unitaire tangent ou l'ensemble des géodésiques de vitesse 1).

La restriction de la forme α à la sous-variété $U(M)$ est une forme de contact (i.e. $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ ne s'annule pas). De plus nous avons les relations

$$\alpha(X) = 1 \quad , \quad i_X d\alpha = 0 \quad (1)$$

Un problème fondamental en géométrie et en dynamique est d'étudier le comportement à long terme des géodésiques.

Dans le cas des variétés compactes à courbure négative, il est connu que ce comportement est fortement instable. Un énoncé précis au sujet de l'instabilité de ce flot est le théorème suivant, démontré par Anosov en 1967 :

Théorème 1 *Le flot géodésique d'une variété riemannienne compacte à courbure négative est un flot d'Anosov de contact.*

Les flots d'Anosov sont ceux pour lesquels il existe des directions stables et instables, plus précisément :

Définition Un flot $\{\phi_t\}$ engendré par un champ de vecteur X sur une variété V est un *flot d'Anosov* s'il existe une décomposition du fibré tangent

$$TV = \mathbb{R}X \oplus E^s \oplus E^u$$

qui est invariante sous l'action du flot et telle que ϕ_t est exponentiellement contractante sur E^s et ϕ_{-t} est exponentiellement contractante sur E^u (pour $t > 0$).

Un flot d'Anosov X est dit de *contact* s'il existe une forme de contact α qui s'annule sur les espaces E^s et E^u et telle que $\alpha(X) = 1$.

Dans le sens réciproque, un théorème datant de 1990 dû à Foulon, Benoist et Labourie [6] dit que, sous des hypothèses de différentiabilité fortes, *tout flot d'Anosov de contact est (après passage à un revêtement ou à un quotient fini et reparamétrisation éventuelle) le flot géodésique d'une variétés riemannienne compacte à courbure négative localement symétrique.*

Nous renvoyons à l'exposé de Pierre Pansu au séminaire Bourbaki [24] pour un historique et d'autres résultats dans cette direction.

1.2 La notion d'horizon

Nous considérons désormais des variétés riemanniennes complètes et non compactes.

Définition Une géodésique $\gamma \in G(M)$ est *bornée* si $\gamma(\mathbb{R}_+)$ est contenu dans un compact et elle est *divergente* dans le cas contraire. On note $G_b(M)$ l'ensemble des géodésiques bornées et $G_\infty(M)$ celui des géodésiques divergentes.

Notons que dans cette définition, on ne considère que le futur de la géodésique, ainsi une géodésique telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = \infty$ peut-elle être bornée.

Si l'on se restreint aux géodésiques de vitesse 1, on note $U_b(M)$ et $U_\infty(M)$.

Lorsque M est une variété de volume fini, alors presque toutes les géodésiques sont bornées :

Proposition 1 *Si M est de volume fini, alors $U_\infty(M) \subset U(M)$ est un sous-ensemble de mesure nulle.*

La preuve est une application du théorème de récurrence de Poincaré (voir le paragraphe 16.D dans [5]). □

D'autre part, toute variété complète non compacte admet des géodésiques divergentes :

Proposition 2 *Si M est une variété riemannienne complète non compacte, alors $G_\infty(M) \neq \emptyset$.*

La preuve se trouve dans [16, p. 242]. □

Définition Deux géodésiques γ_1 et $\gamma_2 \in G_\infty(M)$ sont *asymptotes* si leurs images $\gamma_1(\mathbb{R}_+)$ et $\gamma_2(\mathbb{R}_+)$ sont à distance de Hausdorff finie l'une de l'autre.

Il s'agit d'une relation d'équivalence (notée $\gamma_1 \approx \gamma_2$) et on définit l'horizon géodésiques $M(\infty)$ comme l'ensemble des classes asymptotes de géodésiques divergentes. Ainsi $M(\infty) = G_\infty(M)/\approx = U_\infty(M)/\approx$ et c'est donc canoniquement un espace topologique. Par la proposition 2, on sait que $M(\infty) \neq \emptyset$ (si M est complète et non compacte).

1.3 Raffinement de la notion d'horizon géodésique

On modifie la notion d'horizon géodésiques si l'on ne considère que des géodésiques minimales et/ou des géodésiques issues d'un point base.

Rappelons qu'un *rayon géodésiques* est une géodésique $\gamma : [0, \infty[\rightarrow M$ qui minimise la longueur entre deux quelconques de ses points (i.e.

$\gamma : [0, \infty[\rightarrow \gamma([0, \infty[) \subset M$ est une isométrie). Un rayon géodésique est toujours divergent.

Nous définissons maintenant quatre notions d'horizon géodésique.

Définition. Soit M une variété riemannienne connexe et $0 \in M$ un point base. On note :

- $M(\infty)$ = l'ensemble des classes d'équivalence asymptotes de géodésiques divergentes dans M .
- $M^{min}(\infty)$ = l'ensemble des classes d'équivalence asymptotes de rayons géodésiques dans M .
- $M_0(\infty)$ = l'ensemble des classes d'équivalence asymptotes de géodésiques γ divergentes dans M , tels que $\gamma(0) = 0$.
- $M_0^{min}(\infty)$ = l'ensemble des classes d'équivalence asymptotes de rayons géodésiques γ dans M , tels que $\gamma(0) = 0$.

On a les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} M_0^{min}(\infty) & \subset & M^{min}(\infty) \\ \cap & & \cap \\ M_0(\infty) & \subset & M(\infty) \end{array}$$

Lemme 1.1 *Soit M une variété riemannienne complète connexe et non compacte. Soit q_j une suite divergentes de points de M . Fixons un point base $p \in M$ et choisissons pour tout j une géodésique minimale $\gamma_j : [0, d_j) \rightarrow M$ reliant p à q_j ($d_j = \text{dist}(p, q_j)$) et notons $v_j = \dot{\gamma}_j(0) \in T_p M$ le vecteur initial de γ_j . Soit $v \in T_p M$ un point adhérent à la suite $\{v_j\}$ et $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ la géodésique engendrée par v .*

Alors γ est un rayon géodésique.

Preuve L'argument est classique (voir prop. 2.9.3 dans [20]).

□

Ce lemme montre en particulier que si M est complète et non compacte, alors $M_0^{min}(\infty)$ est non vide.

Remarque Si $v' \in T_p M$ est un autre vecteur adhérent à la suite $\{v_j\}$, et si γ' est le rayon géodésique engendré par v' , alors γ et γ' ne sont pas nécessairement asymptotes. A toute suite divergente de points de M , on associe donc un sous-ensemble de $M_0^{min}(\infty)$.

L'ensemble $M_{x_0}(\infty)$ peut dépendre du point base x_0 .

1.4 Un exemple

Voici un exemple de dépendance de $M_{x_0}(\infty)$ par rapport au point base. Soit $M = \mathbb{R}^2$ muni de la métrique exprimée en coordonnées polaires par

$$ds^2 = dr^2 + g(r)^2 d\theta^2$$

où g est une fonction lisse, positive et telle que

$$g(r) = \begin{cases} r & \text{si } r \leq \frac{1}{2}, \\ \exp(x \cdot \sin(\log(x))) & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

Alors M est une surface complète à courbure bornée. Observons aussi que

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} g(r) = \infty .$$

Lemme 1.2 *Si $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ ($0 \leq t < \infty$) est une géodésique divergente, alors θ est constant.*

Preuve Posons $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $p_1 = \dot{q}_1$ et $p_2 = g(q_1)^2 \dot{q}_2$. Alors l'énergie d'une géodésique s'écrit

$$H = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + g(q_1)^2 \dot{q}_2^2) = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{g(q_1)^2} \right),$$

et l'équation des géodésiques s'écrit sous forme hamiltonienne:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} & , & \quad \dot{q}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0 & , & \quad \dot{q}_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2} \end{aligned}$$

On voit qu'il y a deux intégrales premières¹ : H et $p_2 = g(q_1)^2 \dot{q}_2$. On a d'autre part

$$2H g(q_1)^2 = p_2^2 + p_1^2 g(q_1)^2 \geq p_2^2.$$

Donc, si γ est divergent, alors

$$p_2^2 = \liminf_{r \rightarrow \infty} p_2^2 \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} 2H g(q_1)^2 = 0.$$

Le lemme est démontré

□

Comme $\lim_{r \rightarrow \infty} \sup g(r) = \infty$, il est clair à partir du lemme que deux géodésiques divergentes ne peuvent être asymptotes que si l'une est contenue dans l'autre.

On en conclut que si O est l'origine de M (i.e. le point $r = 0$), alors $M_O(\infty) = M_O^{\min}(\infty) = \mathbb{S}^1$, si $x_0 \neq O$ est un point proche de l'origine, alors $M_{x_0}(\infty) = M_{x_0}^{\min}(\infty)$ contient deux points; alors que si x_1 n'est pas proche de l'origine, alors $M_{x_1}(\infty)$ contient deux points et $M_{x_1}^{\min}(\infty)$ ne contient qu'un point.

¹Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Clairaut, voir par exemple [13], page 255.

1.5 L'horizon des variétés à courbure négative

L'un des premiers travaux portant sur l'étude asymptotique du comportement des géodésiques est sans doute le célèbre article écrit en 1898 par Jacques Hadamard *Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques* [15].

L'un de ses résultats dit que les géodésiques divergentes des surfaces à courbure négative de \mathbb{R}^3 forment un gros ouvert.

Théorème 2 *Soit S une surface complète de \mathbb{R}^3 à courbure négative. Alors $G_b(M) \subset G(M)$ est un ensemble parfait et nulle part dense.*

Ce résultat, montre déjà la sensibilité aux conditions initiales du flot géodésique en courbure négative.

Pour les surfaces simplement connexes à courbure négative, Hadamard montre dans le même article que “*toutes les géodésiques s'en vont à l'infini et la distribution est analogue à celles des droites d'un plan*” et il ajoute en note de fin de page “*plus exactement d'un plan non euclidien*”.

Ce résultat se généralise en toute dimension. De façon plus précise, P. Eberlein et B. O'Neill ont montré le théorème suivant en 1972 (voir [11]):

Théorème 3 *Soit M une variété M complète simplement connexe à courbure $K \leq 0$ de dimension n (une telle variété s'appelle une variété de Cartan-Hadamard). Alors il existe une topologie sur l'ensemble $M \cup M(\infty)$ telle que cet espace est homéomorphe à une boule fermée \bar{B}^n .*

En particulier, $M(\infty)$ est une sphère (qui prend le nom de *bord à l'infini* de M).

La propriété essentielle est ici la convexité de la fonction distance dans une variété de Cartan-Hadamard. Il découle aussi de cette convexité que pour de telle variété, les quatres notions d'horizon coïncident.

La construction d'un bord à l'infini est également possible pour certains espaces métriques autres que des variétés, tels que les arbres et les espaces hyperboliques au sens de Gromov. Cette construction utilise une notion de “quasi-rayon”, voir [12].

Le bord à l'infini à été très étudié. Par exemple Andersen et Schoen ont montré qu'en courbure strictement négative, on peut résoudre un problème de Dirichlet (voir [3]):

Théorème 4 *Soit M une variété M complète simplement connexe dont la courbure est pincée entre deux constantes négatives. Alors toute fonction continue sur $M(\infty)$ peut être étendue en une fonction harmonique sur M*

En d'autres termes $M(\infty)$ est également le bord de Martin de M . Ce résultat est encore vrai si la variété est un espaces hyperboliques au sens de Gromov, voir [1].

Des structures plus fines que la structure topologique ont été introduites sur $M(\infty)$, par exemple la métrique de Tits ou la structure quasi-conforme. Ces structures jouent un rôle important dans les démonstrations des théorèmes de rigidité pour les espaces localement symétriques (voir [26] et [7]).

On sait en particulier par les travaux de Mostow, Pansu, Paulin et d'autres que les espaces hyperboliques (au sens de Gromov) admettant un groupe cocompact d'isométries, sont déterminés à quasi-isométrie près par la géométrie quasi-conforme de leur bord à l'infini :

Théorème 5 *Soient X et Y deux espaces hyperboliques (au sens de Gromov) admettant un groupe cocompact d'isométries, et soit $f : X(\infty) \rightarrow Y(\infty)$ un homéomorphisme. Alors f est l'extension d'une quasi-isométrie entre X et Y si et seulement si f est \mathbf{I} -quasiconforme.*

Nous renvoyons à l'article de Paulin [25] pour plus de précisions.

Signalons enfin que la dynamique de l'action du groupe des isométries sur le bord à l'infini d'une variété de Cartan-Hadamard joue un rôle important dans plusieurs théories; notamment dans la preuve du théorème de Benoist Foulon Labourie cité plus haut ainsi que dans la preuve des théorèmes de rigidité.

1.6 Le cas des variétés à courbure positive

Dans le cas des variétés à courbure positive, nous avons pour commencer le résultat suivant (voir [16, prop. 2.9.14]):

Théorème 6 *Soit M une variété riemannienne complète à courbure strictement positive. Alors toute géodésique est divergente (i.e. $G_b(M) = \emptyset$).*

Le comportement asymptotique des variétés à courbure non négative à été étudié par Atsushi Kasue. Pour étudier asymptotiquement les rayons géodésiques dans ces espaces, il introduit une variante à notre notion d'horizon.

Définition Deux rayons géodésiques α et β sont *équivalents* si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d(\alpha(t), \beta(t))}{t} = 0.$$

On notera² $M^b(\infty)$ l'ensemble des classes d'équivalence de rayons dans M .

A titre d'exemple, si $M \subset \mathbb{R}^3$ est un paraboloïde de révolution, alors $M^{min}(\infty)$ est un cercle et $M^b(\infty)$ est un point.

²Kasue note cet ensemble $M(\infty)$ nous introduisons le symbole b pour éviter une ambiguïté

Kasue définit une distance sur $M^b(\infty)$ par

$$\delta_\infty([\alpha], [\beta]) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_t(\alpha \cap S_t, \beta \cap S_t)}{t}$$

où $S_t \subset M$ est la sphère de rayon t centrée en o et d_t est la distance intrinsèque sur cette sphère.

Par exemple si $M = \mathbb{R}^n$, alors clairement l'espace métrique $(M^b(\infty), \delta_\infty)$ est isométrique à la sphère unité $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Kasue montre entre autre les résultats suivant [19]

Théorème 7 *Soit M une variété complète non compacte à courbure non négative et ayant un seul bout.*

Alors $\text{diam}(M^b(\infty), \delta_\infty) \leq \pi$, avec égalité si et seulement si M est isométrique à un produit riemannien $M = N \times \mathbb{R}$.

Théorème 8 *Soit M une variété complète non compacte dont la courbure vérifie une inégalité $K \geq c/(r^2 \log r)$ en dehors d'un compact, où $c > 0$ et $r = d(p, o)$ (avec $o \in M$ un point base).*

Alors $M^b(\infty)$ est un ensemble fini.

Kasue a étendu son étude aux variétés à courbure asymptotiquement non négative.

1.7 Présentation de SOL

SOL est un groupe de Lie, noté \mathcal{S} , isomorphe au sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ formé des matrices

$$\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ce groupe est résoluble, unimodulaire et non nilpotent.

Mais \mathcal{S} est aussi une variété riemannienne difféomorphe à \mathbb{R}^3 . La métrique étant donnée par

$$ds^2 = e^{-2z} dx^2 + e^{2z} dy^2 + dz^2 .$$

Cette métrique est invariante à gauche (mais pas à droite). \mathcal{S} est donc un espace riemannien homogène. On verra qu'il a peu d'isotropie.

La géométrie de Sol est intéressante pour les raisons suivantes :

- C'est la composante de l'identité dans le groupe de Poincaré planaire (i.e. le groupe des déplacements du plan de Minkowski $\mathbb{E}^{1,1}$).

- C'est un exemple simple de groupe de Lie résoluble non nilpotent.
- Sol apparaît comme horosphère dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.
- C'est l'une des "huit géométries de Thurston".

A la fin des années 70, W. Thurston a proposé un programme pour classifier les variétés de dimensions 3 (cf. [27, 28]). Ce programme procède en gros par trois étapes :

1ère étape : On découpe les variétés le long de sphères et de tores non triviaux, jusqu'à obtenir des morceaux "simples" (cela peut être fait de façon canonique).

2ème étape : Chaque morceau simple admet (conjecturalement) une et une seule structure géométrique. C'est à dire une métrique riemannienne localement isométrique à l'un des 8 espaces riemanniens homogène suivant :

$$\mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H}^3, \quad \mathbb{S}^3, \quad \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \\ \widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}), \quad \text{Nil}, \quad \text{Sol}.$$

(Nil est le groupe de Heisenberg).

3ème étape : On classifie les morceaux géométriques.

1.8 l'Horizon de SOL

Dans le dernier paragraphe de cet article, on décrit l'horizon de SOL. Les quatres espaces $\mathcal{S}_0^{\min}(\infty)$, $\mathcal{S}_0(\infty)$, $\mathcal{S}^{\min}(\infty)$ et $\mathcal{S}(\infty)$ sont des espaces topologiques de dimension 1. Ils sont tous distincts. Les trois derniers sont des espaces non séparés.

Le comportement asymptotique des géodésiques de \mathcal{S} est très différent du cas des variétés à courbure négative ou positive. Cette différence ce reflète dans la structure de l'horizon.

2 Sol comme groupe de Lie

Le groupe \mathbb{R} agit sur le groupe abélien \mathbb{R}^2 par

$$z \cdot (x, y) = (e^z x, e^{-z} y).$$

Par définition, \mathcal{S} est le produit semi-direct associé :

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0.$$

\mathcal{S} est donc difféomorphe à \mathbb{R}^3 , et la loi de groupe s'écrit

$$(x, y, z)(x', y', z') = (e^z x' + x, e^{-z} y' + y, z + z'),$$

de plus, \mathcal{S} est isomorphe au groupe des matrices du type

$$\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est aussi isomorphe au sous groupe parabolique

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} e^{z/2} & e^{-z/2} x \\ 0 & e^{-z/2} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e^{-z/2} & e^{z/2} y \\ 0 & e^{z/2} \end{pmatrix} \right) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

de $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$.

Les automorphismes intérieurs de \mathcal{S} sont donnés par

$$(a, b, c)(x, y, z)(a, b, c)^{-1} = (e^c x + a(1 - e^z), e^{-c} y + b(1 - e^{-z}), z),$$

et les commutateurs par

$$(a, b, c)(x, y, z)(a, b, c)^{-1}(x, y, z)^{-1} = (a(1 - e^z) - x(1 - e^c), b(1 - e^{-z}) - y(1 - e^{-c}), 0).$$

Ainsi, le groupe dérivé $[\mathcal{S}, \mathcal{S}]$ est abélien, en particulier \mathcal{S} est résoluble (mais non nilpotent car $[[\mathcal{S}, \mathcal{S}], \mathcal{S}] = [\mathcal{S}, \mathcal{S}]$).

La mesure de Haar de \mathcal{S} est donnée par $dx dy dz$, elle est invariante à gauche et à droite. Sol est donc un groupe unimodulaire.

L'algèbre de Lie \mathfrak{s} de \mathcal{S} a pour base

$$X := e^z \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y := e^{-z} \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z := \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

Et on a les crochets

$$[X, Y] = 0, \quad [Z, X] = X, \quad [Z, Y] = -Y.$$

En utilisant la représentation matricielle de \mathcal{S} , on peut identifier

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Sol comme variété riemannienne

On muni \mathcal{S} de la métrique riemannienne invariante à gauche pour laquelle les champs X, Y, Z forment un repère orthonormé. Le tenseur métrique est alors donné par

$$ds^2 = e^{-2z} dx^2 + e^{2z} dy^2 + dz^2.$$

L'espace est homogène, son groupe d'isotropie est non trivial.

Lemme 3.1 *Les transformations S et U définies par*

$$S(x, y, z) = (y, -x, -z) \quad , \quad U(x, y, z) = (-x, y, z)$$

engendrent un groupes d'isométries de (\mathcal{S}, ds^2) fixant l'origine. Ce groupe est isomorphe à $D(4)$ (le groupe diédral à 8 éléments).

La preuve est une simple vérification. □

On verra plus loin que $D(4)$ est en fait le groupe complet d'isotropie.

La clé pour comprendre la géométrie de \mathcal{S} (la clé de Sol) est donnée par les trois feuilletages suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &:= \{dy = 0\} \\ \mathcal{H}'' &:= \{dx = 0\} \\ \mathcal{F} &:= \{dz = 0\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.1 *\mathcal{H}' et \mathcal{H}'' sont des feuilletages totalement géodésiques par des plans hyperboliques.*

Preuve. Toute les feuilles du feuilletage \mathcal{H}' sont équivalentes (par translation à gauche) à la feuille \mathcal{H}'_0 passant par l'origine; il suffit donc de considérer cette feuille (même remarque pour les feuilletages \mathcal{H}'' et \mathcal{F}). Or \mathcal{H}'_0 est l'ensemble des points fixes de l'isométrie $U \circ S^2 : (x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$. Il s'ensuit immédiatement que \mathcal{H}'_0 est une sous-variété totalement géodésique.

Posons maintenant $u = x$, $v = e^z$, nous avons alors

$$e^{-2z} dx^2 + dz^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

On a donc défini une isométrie entre \mathcal{H}'_0 et $\mathbb{H}^2 = \{(u, v) : v > 0\}$ (muni de la métrique de Poincaré). □

Remarque Les coordonnées (x, z) (telles que $ds^2 = e^{-2z} dx^2 + dz^2$) sur le plan hyperbolique s'appellent les *coordonnées horocycliques*.

Proposition 3.2 *La connexion de Levi-Civita de \mathcal{S} est donnée par*

$$\begin{array}{lll} \nabla_X X = Z & \nabla_X Y = 0 & \nabla_X Z = -X \\ \nabla_Y X = 0 & \nabla_Y Y = -Z & \nabla_Y Z = Y \\ \nabla_Z X = 0 & \nabla_Z Y = 0 & \nabla_Z Z = 0 \end{array}$$

où X, Y , et Z sont les champs définis en (2).

Preuve La preuve est une simple vérification à partir de l'identité de Christoffel:

$$2 \langle \nabla_U V, W \rangle = \langle [U, V], W \rangle + \langle [W, U], V \rangle - \langle [V, W], U \rangle \\ + U \langle V, W \rangle + V \langle W, U \rangle - W \langle U, V \rangle$$

(comme les champs de vecteurs X , Y , et Z forment une base orthonormée, les trois derniers termes de cette identité sont nuls). □

Proposition 3.3 *\mathcal{F} est un feuilletage minimal par des plans euclidiens. De plus, les directions principales de \mathcal{F} sont données par X et Y .*

Preuve On considère uniquement la feuille \mathcal{F}_0 passant par l'origine.

Une surface dans une variété riemannienne de dimension 3 est une surface minimale si la somme de ses courbures principales est nulle en chaque point.

Les courbures principales sont les valeurs propres de l'opérateur de Weingarten $L(U) = -\nabla_U N$ (où N est un champ de vecteurs unitaires normaux à la surface).

Dans notre cas, on a $N = Z$ et l'opérateur de Weingarten est donné par

$$L(X) = -\nabla_X Z = X \quad , \quad L(Y) = -\nabla_Y Z = -Y .$$

Donc $\{X, Y\}$ est une base propre pour L et les valeurs propres sont $+1$ et -1 . Comme \mathcal{F}_0 est clairement un plan euclidien, la proposition est démontrée. □

Corollaire 3.1 *Les courbures sectionnelles de \mathcal{S} le long de ces feuilletages sont données par*

$$K(\mathcal{H}') = K(\mathcal{H}'') = -1 \quad , \quad K(\mathcal{F}) = 1 .$$

Preuve Le résultat sur la courbure de \mathcal{H}' et \mathcal{H}'' découle immédiatement de la proposition 3.1. En effet, la courbure gaussienne de \mathcal{F}_0 (= produit des courbures principales) vaut -1 et sa courbure intrinsèque vaut 0 (car \mathcal{F}_0 est plat), or le théorème egregia de Gauss dit que

$$\text{Courbure sectionnelle} = \text{Courbure intrinsèque} - \text{Courbure gaussienne} \\ = 0 - (-1) = +1$$

□

On peut également prouver ce corollaire en calculant la courbure directement à partir de la connexion de Levi-Civita.

Rappelons que l'opérateur de courbure

$$R : \Lambda^2(T_p\mathcal{S}) \rightarrow \Lambda^2(T_p\mathcal{S})$$

est défini par la condition

$$\langle R(U \wedge V), W \wedge T \rangle = \langle R_{U,V}T, W \rangle = \langle (\nabla_U \nabla_V - \nabla_V \nabla_U - \nabla_{[U,V]}) T, W \rangle.$$

Proposition 3.4 *Dans la base (orthonormée) $\{X \wedge Y, X \wedge Z, Y \wedge Z\}$ de $\Lambda^2(T_p\mathcal{S})$, l'opérateur de courbure est donné par la matrice*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La preuve est un simple calcul. □

En conséquence, la courbure de Ricci est donnée dans la base X, Y, Z par

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Et la courbure scalaire est égale à -2.

Nous sommes à présent en mesure de compléter le lemme 1.

Lemme 3.2 *Le groupe complet des isométries de \mathcal{S} fixant l'origine est le groupe $D(4)$ décrit au lemme 1.*

En particulier, le groupe des isométries de \mathcal{S} est un produit semi-direct de \mathcal{S} avec le groupe fini $D(4)$:

$$1 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \text{Iso}(\mathcal{S}) \rightarrow D(4) \rightarrow 1.$$

Preuve Soit $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ une isométrie fixant 0. Comme g doit préserver la courbure de Ricci, on a $r(dg(Z)) = r(Z) = 2$, par conséquent

$$dg(Z) = \pm Z.$$

Introduisons à présent la forme bilinéaire $q(U, V) := \langle \nabla_U Z, V \rangle$. La matrice de q dans la base X, Y, Z ce calcule facilement, elle vaut

$$q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que $dg(Z) = Z$, alors q est invariante par dg et nous avons donc

$$dg(X) = \pm X \quad , \quad dg(Y) = \pm Y \quad ,$$

et donc dg est donné par l'une des quatre matrices

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si au contraire $dg(Z) = -Z$, alors $q(dg(U)) = -q(U)$ et nous avons donc

$$dg(X) = \pm Y \quad , \quad dg(Y) = \pm X \quad ,$$

et par conséquent dg est donné par l'une des quatre matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Par conséquent, le groupe d'isotropie contient exactement 8 éléments. Le lemme est donc démontré. □

Terminons ce paragraphe en décrivant les champs de Killing de \mathcal{S} .

Il est facile de vérifier que si G est un groupe de Lie muni d'une métrique invariante à gauche, alors les champs invariants à droites sont des champs de Killing complets. Ainsi, les champs

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

sont des champs de Killing complets sur \mathcal{S} . L'ensemble des champs de Killing complets sur une variété riemannienne est (anti-)isomorphe à l'algèbre de Lie de son groupe d'isométries (cf [23], chap 9). Par conséquent, tout champ de Killing sur \mathcal{S} est combinaison linéaire des 3 champs ci-dessus (en effet, nous venons de montrer que le groupe des isométries de \mathcal{S} est de dimension 3).

4 Calcul des géodésiques de \mathcal{S}

4.1 L'équation des géodésiques

Lemme 4.1 *Une courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{S}$ est géodésique si et seulement si elle vérifie l'équation*

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 2\dot{x}\dot{z} \\ \ddot{y} &= -2\dot{y}\dot{z} \\ \ddot{z} &= -e^{-2z}\dot{x}^2 + e^{2z}\dot{y}^2 . \end{cases} \quad (3)$$

De plus

$$a = \dot{x}e^{-2z} \quad , \quad b = \dot{y}e^{2z} \quad , \quad d = ax - by + \dot{z}$$

et

$$H = \frac{1}{2}(e^{-2z}\dot{x}^2 + e^{2z}\dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

sont des intégrales premières.

La preuve est une simple vérification à partir de la proposition 3.2. □

Remarques

1. Une intégrale première est une fonction $T\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est constante sur les géodésiques.
2. $H = \frac{1}{2}\|\dot{\gamma}\|^2$ est simplement l'énergie de la géodésique.
3. On a $a = \langle \dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle$ et $b = \langle \dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$. Plus généralement, dans toute variété riemannienne, si γ est une géodésique et U est un champ de Killing, alors $\langle \dot{\gamma}, U \rangle$ est constant [23, chap.9, lemme 26] (il s'agit en fait d'un cas particulier du théorème d'Emmy Noether, voir [5], §20).

L'équation des géodésiques peut s'écrire sous la forme d'un système hamiltonien. Pour cela, on introduit les variables conjuguées à x, y et z :

$$a := \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \dot{x}e^{-2z} \quad , \quad b := \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = \dot{y}e^{2z} \quad \text{et} \quad c := \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} = \dot{z}$$

en sorte que $(x, y, z; a, b, c)$ est un système de coordonnées sur $T\mathcal{S}$ ³.

Le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{1}{2}(a^2e^{2z} + b^2e^{-2z} + c^2),$$

et la forme hamiltonienne de l'équation est

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial a} = ae^{2z} & \dot{a} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial b} = be^{-2z} & \dot{b} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial c} = c & \dot{c} &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -a^2e^{2z} + b^2e^{-2z} \end{aligned}$$

³Ces coordonnées sont dites *canoniques*. Habituellement, on considère qu'il s'agit de coordonnées sur le fibré cotangent. Toutefois, on identifie $T\mathcal{S}$ et $T\mathcal{S}^*$ à l'aide de la métrique riemannienne.

Les fonctions a , b et H sont en involution, le système est donc totalement intégrable (cf [5] §49).

On voit également que le système différentiel (3) se découple en trois équations à une variable:

Lemme 4.2 *La courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{S}$ est géodésique si et seulement s'il existe deux constantes a et b telles que*

$$\dot{x} = a e^{2z} \quad , \quad \dot{y} = b e^{-2z}$$

et

$$\ddot{z} = -a^2 e^{2z} + b^2 e^{-2z} . \quad (4)$$

□

Dans la suite des calculs, nous supposons toujours que $2H = 1$ (cela correspond à une paramétrisation des géodésiques par la longueur d'arc).

4.2 Calcul de $z(t)$ lorsque $ab = 0$

Lorsque $a = b = 0$, on a $\ddot{z} = 0$ et donc $z = z_0 \pm t$ (rappelons qu'on suppose $H = \frac{1}{2}$).

Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors la solution $z(t)$ de l'équation (4) est donné par le lemme suivant:

Lemme 4.3 *Si $a^2 e^{2z_0} + c_0^2 = 1$, alors la fonction*

$$z(t) := z_0 - \log(\cosh(t) - c_0 \sinh(t))$$

vérifie $\ddot{z} = -a^2 e^{2z}$, $z(0) := z_0$ et $\dot{z}(0) = c_0$.

Preuve Il est clair que $z(0) := z_0$. Un calcul montre que

$$\dot{z}(t) = \frac{c_0 - \tanh(t)}{1 - c_0 \tanh(t)} ,$$

d'où l'on voit que $\dot{z}(0) = c_0$ et

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)} \frac{c_0^2 - 1}{(1 - c_0 \tanh(t))^2} = -\frac{a^2 e^{2z_0}}{(\cosh(t) - c_0 \sinh(t))^2} = -a^2 e^{2z} .$$

□

De façon analogue, si $a = 0$ et $b \neq 0$, on a

Lemme 4.4 *Si $b^2 e^{-2z_0} + c_0^2 = 1$, alors la fonction*

$$z(t) := z_0 + \log(\cosh(t) + c_0 \sinh(t))$$

vérifie $\ddot{z} = -b^2 e^{-2z}$, $z(0) := z_0$ et $\dot{z}(0) = c_0$.

□

4.3 Calcul de $z(t)$ lorsque $ab \neq 0$

Lorsque a et b sont non nulles, on définit quatre nouvelles constantes par le tableau 1.

$k = \sqrt{\frac{1-2 ab }{1+2 ab }}$	$k' = 2\sqrt{\frac{ ab }{1+2 ab }}$
$\bar{z} = \frac{1}{2} \log \left \frac{b}{a} \right $	$\mu = \sqrt{1 + 2 ab }$

Tableau 1

Puis on introduit la fonction

$$h(s) = h(s, k) := \operatorname{Arsinh} \left(\frac{k}{k'} \operatorname{cn}(s) \right) = \log \left(\frac{1}{k'} (k \operatorname{cn}(s) + \operatorname{dn}(s)) \right).$$

Où cn et dn sont les fonctions elliptiques de Jacobi discutées en appendice.

Lemme 4.5 *La fonction h est $4K$ -périodique et vérifie:*

1. $h'(s) = -k \operatorname{sn}(s)$;
2. $h''(s) = -k \operatorname{cn}(s) \operatorname{dn}(s)$;
3. $h(s + 2K) = -h(s)$;
4. si $k = 0$, alors $h \equiv 0$.

Où K et k' sont définis par le tableau 2 (cf. appendice).

La preuve est une vérification directe à partir des résultats de l'appendice. □

Lemme 4.6 *La fonction $z(t) := h(\mu t - K)$ est solution de l'équation (4) avec les conditions initiales $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = \mu k$.*

Preuve D'après le lemme précédent, on a

$$\ddot{z} = -\mu^2 k \operatorname{cn}(\mu t - K) \operatorname{dn}(\mu t - K).$$

D'autre part, nous avons par définition

$$e^{z(t)} = \frac{1}{k'} (\operatorname{dn}(\mu t - K) + k \operatorname{cn}(\mu t - K))$$

d'où l'on déduit

$$e^{-z(t)} = \frac{1}{k'} (\operatorname{dn}(\mu t - K) - k \operatorname{cn}(\mu t - K))$$

(multiplier les deux expressions pour le vérifier!)

Par conséquent,

$$a^2 e^{2z(t)} = \frac{\mu^2}{4} (\operatorname{dn}(\mu t - K) + k \operatorname{cn}(\mu t - K))^2,$$

et

$$b^2 e^{-2z(t)} = \frac{\mu^2}{4} (\operatorname{dn}(\mu t - K) - k \operatorname{cn}(\mu t - K))^2.$$

En additionnant ces deux identités, on obtient

$$-a^2 e^{2z(t)} + b^2 e^{-2z(t)} = -\mu^2 k \operatorname{cn}(\mu t - K) \operatorname{dn}(\mu t - K) = \ddot{z}.$$

□

Pour résoudre l'équation (4) avec d'autres conditions initiales, il faut faire un décalage temporel fondé sur le lemme suivant:

Lemme 4.7 *Soient $a, b, c_0, z_0 \in \mathbb{R}$ quatre nombres tels que $ab \neq 0$ et*

$$2H = a^2 e^{2z_0} + b^2 e^{-2z_0} + c_0^2 = 1.$$

Notons $h(s) = h(s, k)$, alors il existe un unique $s_0 \in [-2K, 2K)$ tel que $h(s_0) = z_0 - \bar{z}$ et $h'(s_0) = c_0/\mu$.

Preuve Supposons d'abord que $c_0 \geq 0$. Notons $\lambda = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$, et observons que h est une fonction $4K$ -périodique oscillant entre $-\lambda$ et λ et telle que

$$h(0) = \lambda, \quad h(-2K) = h(2K) = -\lambda.$$

De plus, la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-2K, 0]$ et décroissante sur $[0, 2K]$. En particulier, il existe une solution (unique) $s_0 \in [-2K, 0]$ de l'équation $h(s_0) = (z_0 - \bar{z})$ si et seulement si

$$|z_0 - \bar{z}| \leq \lambda.$$

Cette condition est équivalente à

$$\frac{\cosh(2(z_0 - \bar{z}))}{\cosh(2\lambda)} \leq 1.$$

Mais $\cosh(2\lambda) = 1/(2|ab|)$, par conséquent la condition d'existence de s_0 s'écrit

$$2|ab| \cosh(2(z_0 - \bar{z})) = a^2 e^{2z_0} + b^2 e^{-2z_0} \leq 1.$$

Or cette dernière condition est satisfaite par hypothèse.

Montrons à présent que

$$(\mu h'(s_0))^2 = c_0^2.$$

Nous avons $h'(s) = -k \operatorname{sn}(s)$ et $c_0^2 = 1 - a^2 e^{2z_0} - b^2 e^{-2z_0}$, donc l'équation ci-dessus est équivalente à l'équation

$$(\mu k \operatorname{sn}(s_0))^2 = 1 - a^2 e^{2z_0} - b^2 e^{-2z_0}. \quad (5)$$

Or $z_0 = \bar{z} + h(s_0) = \frac{1}{2} \log(|\frac{b}{a}|) + h(s_0)$, d'où

$$\begin{aligned} a^2 e^{2z_0} + b^2 e^{-2z_0} &= |ab| e^{2h(s_0)} + |ab| e^{-2h(s_0)} \\ &= 2|ab| \cosh(2h(s_0)) \\ &= 2|ab| (1 + 2 \sinh^2(h(s_0))), \end{aligned}$$

donc

$$1 - a^2 e^{2z_0} - b^2 e^{-2z_0} = 1 - 2|ab| - 4|ab| \sinh^2(h(s_0)).$$

En utilisant $\sinh(h(s)) = \frac{k}{k'} \operatorname{cn}(s) = \frac{k}{k'} \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(s)}$, on obtient

$$1 - a^2 e^{2z_0} - b^2 e^{-2z_0} = (1 - 2|ab|) - 4|ab| \left(\frac{k}{k'}\right)^2 (1 - \operatorname{sn}^2(s_0)). \quad (6)$$

Or nous avons d'après le tableau 1

$$4|ab| \left(\frac{k}{k'}\right)^2 = 1 - 2|ab| = (\mu k)^2$$

donc l'identité (5) est conséquence de (6).

Nous avons donc montré qu'il existe $s_0 \in [-2K, 0]$ tel que $h(s_0) = (z_0 - \bar{z})$ et $(\mu h'(s_0))^2 = c_0^2$, comme h est croissante sur l'intervalle $[-2K, 0]$, on a automatiquement $h'(s_0) \geq 0$ et donc $h'(s_0) = c$.

Si $c_0 < 0$, la preuve est la même, en prenant $s_0 \in [0, 2K)$. □

Proposition 4.1 *Supposons que $a^2 e^{2z_0} + b^2 e^{-2z_0} + c_0^2 = 1$, et posons $\tau := \frac{1}{\mu}(s_0 + K)$ où s_0 est donné par le lemme 4.7.*

Alors la solution de l'équation (4) vérifiant les conditions initiales $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = c_0$ est

$$z(t) = \bar{z} + h(\mu(t + \tau) - K).$$

Preuve On a $z(0) = \bar{z} + h(\mu\tau - K) = \bar{z} + h(s_0) = z_0$. D'autre part, d'après le lemme 4.7, on a

$$\frac{dz}{dt}(0) = \mu h'(\mu\tau - K) = \mu h'(s_0) = c_0.$$

□

4.4 Intégration de l'équation des géodésiques (cas $ab \neq 0$)

Pour intégrer le système (3), il est commode d'introduire de nouvelles coordonnées définies par

$$\begin{cases} u &= by - ax \\ v &= ax + by \end{cases}$$

Dans ces coordonnées, le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{u} &= -a^2 e^{2z} + b^2 e^{-2z} \\ \dot{v} &= 2H - (u + d)^2 \\ \dot{z} &= (u + d) \end{cases}$$

où a, b, d, H sont constants.

Observons que $u(t) = (\dot{z}(t) - d)$ a déjà été calculé dans les paragraphes précédents, si $ab \neq 0$, alors, par la proposition 4.1 et le lemme 4.5, on a

$$u(t) = -d - \mu k \operatorname{sn}(\mu(t + \tau) - K).$$

Le hamiltonien peut s'écrire

$$2H = (u + d)^2 + (a^2 e^{2z} + b^2 e^{-2z}) \quad (7)$$

En particulier, si $ab \neq 0$, alors l'équation (7) décrit un cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ dans l'espace uvz et toute géodésique dont les intégrales premières sont a, b, d et H est contenue dans ce cylindre.

La fonction $v(t)$ est donnée par le

Lemme 4.8 *Si $ab \neq 0$, alors*

$$v(t) = \bar{v} + \mu \mathcal{Z}(\mu(t + \tau) - K) + 2 \left(L \mu \sqrt{ab} \right) t \quad (8)$$

où \mathcal{Z} est la fonction Zêta de Jacobi (cf. appendice), et

$$\bar{v} = v_0 \mu \mathcal{Z}(\mu\tau - K) \quad , \quad L := L(k) = \left(\frac{E}{k'K} - \frac{k'}{2} \right)$$

Preuve Définissons $v(t)$ par l'équation (8) et posons $s := (\mu(t + \tau) - K)$.
Nous avons

$$\left(1 + \mu^2 \left(\frac{E}{K} - 1\right)\right) = 2(L\mu\sqrt{ab}) ,$$

donc

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \mu^2 \left(\operatorname{dn}^2(s) - \frac{E}{K}\right) + \left(1 + \mu^2 \left(\frac{E}{K} - 1\right)\right) \\ &= 1 - \mu^2 \operatorname{dn}^2(s) \\ &= 1 - (u + d)^2 \end{aligned}$$

□

En résumé, les géodésiques telles que $ab \neq 0$ sont données par

$$\begin{cases} u(t) &= -d - \mu k \operatorname{sn}(\mu(t + \tau) - K) \\ v(t) &= \bar{v} + \mu \mathcal{Z}(\mu(t + \tau) - K) + 2(L\mu\sqrt{ab})t \\ z(t) &= \bar{z} + h(\mu(t + \tau) - K) \end{cases}$$

4.5 Retour aux coordonnées x, y, z

Pour écrire les géodésiques dans les coordonnées x, y, z , il suffit de substituer $x = \frac{v-u}{2a}$ et $y = \frac{v+u}{2b}$ dans les formules de la section précédentes.

Toutefois, on obtient de cette manière des expressions compliquées. Pour les simplifier, nous introduisons la fonction

$$f(s) = f(s, k) := \frac{1}{k'} (\mathcal{Z}(s) + k \operatorname{sn}(s)) .$$

Cette fonction vérifie

$$f(s + K) + f(s - K) = \frac{2}{k'} \mathcal{Z}(s + K) ,$$

$$f(s + K) - f(s - K) = \frac{2k}{k'} \operatorname{sn}(s + K)$$

et

$$f'(s) = \frac{1}{2k'} (\operatorname{dn}(s) + k \operatorname{cn}(s))^2 - L = \frac{k'}{2} e^{2h(s)} - L .$$

La solution explicite de l'équation des géodésiques telles que $ab \neq 0$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Soit*

$(x_0, y_0, z_0; a, b, c_0)$ un point de $T\mathcal{S}$. Supposons que $ab \neq 0$ et que $2\mathbb{H}(a^2e^{2z} + b^2e^{-2z} + c^2) = 1$. Définissons k, k', \bar{z} et μ et L par les tableaux 1 et 2.

Définissons ensuite $\tau := \frac{1}{\mu}(s_0 + K)$ où s_0 est donné par le lemme 4.7.

Alors la courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ définie par

$$\begin{cases} x(t) & := \xi + e^{\bar{z}}(f(\mu(t + \tau) - K) + L\mu(t + \tau) + \frac{k}{k'}); \\ y(t) & := \eta + e^{-\bar{z}}(f(\mu(t + \tau) + K) + L\mu(t + \tau) - \frac{k}{k'}); \\ z(t) & := \bar{z} + h(\mu(t + \tau) - K). \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \xi & := x_0 - e^{\bar{z}}(f(s_0) + L\mu\tau + \frac{k}{k'}) \\ \eta & := y_0 - e^{-\bar{z}}(f(s_0 + 2K) + L\mu\tau - \frac{k}{k'}) \end{aligned}$$

est géodésique et vérifie les conditions initiales $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ et $\dot{\gamma}(0) = (ae^{2z_0}, be^{-2z_0}, c_0)$.

Preuve En posant $u(t) = by(t) - ax(t)$ et $v(t) = by(t) + ax(t)$, on calcule que $u(t) = (cte) - \mu k \operatorname{sn}(\mu(t + \tau) - K)$ et $v(t) = (cte')\bar{v} + \mu \mathcal{Z}(\mu(t + \tau) - K) + (1 + \mu^2(\frac{E}{K} - 1))t$. On voit donc (par le paragraphe précédent) que γ est une géodésique.

Les conditions initiales se vérifient directement. □

Les autres géodésiques, pour lesquelles $ab = 0$, seront décrites au §5.2.

5 La géométrie des géodésiques

Il est commode de classer les géodésiques de \mathcal{S} en trois types (et plusieurs sous-type) :

On dit qu'une géodésique est de **type A** si elle est contenue dans une feuille du feuilletage minimal \mathcal{F} .

On dit qu'une géodésique est de **type B** si elle est contenue dans une feuille de l'un des feuilletages totalement géodésiques \mathcal{H}' ou \mathcal{H}'' (suivant les cas, on dit qu'il appartient au sous-type B' ou B'').

On dit qu'une géodésique est de **type C** si elle n'est pas de type A ou B.

5.1 Les géodésiques de type A

Des exemples évidents de géodésiques de type A sont les 4 droites horizontales orientées

$$\alpha^{\pm\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm t, \pm t, 0)$$

contenues dans \mathcal{F}_0 . Toutes les autres géodésiques de type A s'obtiennent par translation à gauche de l'une de ces droites.

Proposition 5.1 Soit $\alpha(t) \in \mathcal{S}$ une géodésique de type A. Considérons les intégrales premières a, b et H de α ; notons ϵ le signe de ab .

Alors

$$\dot{x} = \epsilon b \quad , \quad \dot{y} = \epsilon a \quad , \quad \dot{z} = 0 ,$$

de plus

$$H = |ab| \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2} \log \left| \frac{b}{a} \right| .$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (x_0 + \epsilon b t, y_0 + \epsilon a t, z) \\ &= (x_0, y_0, z) \cdot (\pm \sqrt{H} t, \pm \sqrt{H} t, 0) \end{aligned}$$

(il s'agit de la multiplication dans le groupe \mathcal{S}).

Définitions. 1) On dit que z (qui est constant) est la *hauteur* de la géodésique α .

2) On divise le type A en quatre sous-type $A^{\pm\pm}$ selon les signes de a et b .

Cette proposition pourrâit être déduite du théorème 4.1 (tout au moins si $H = \frac{1}{2}$). Il est cependant plus simple d'en donner une preuve directe.

Preuve On sait que z est constante et que l'on a

$$\dot{x} = a e^{2z} \quad , \quad \dot{y} = b e^{-2z} .$$

D'autre part

$$\ddot{z} = -e^{-2z} \dot{x}^2 + e^{2z} \dot{y}^2 = 0 .$$

Les trois équations ci-dessus entraînent

$$\left(\frac{b}{a} \right)^2 = e^{4z} ,$$

c'est à dire $z = \frac{1}{2} \log \left| \frac{b}{a} \right|$. Finalement

$$\begin{aligned} 2H &= e^{-2z} \dot{x}^2 + e^{2z} \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = e^{2z} a^2 + e^{-2z} b^2 + 0 \\ &= \left| \frac{b}{a} \right| a^2 + \left| \frac{a}{b} \right| b^2 = 2|ab| . \end{aligned}$$

□

5.2 Les géodésiques de type B

Une géodésique $\beta(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{S}$ est de type B si $\dot{x}\dot{y} = 0$ (ce qui est équivalent à $ab = 0$). Elle est de type B'' si $\dot{x} = 0$ (i.e. $a = 0$) et de type B' si $\dot{y} = 0$ (i.e. $b = 0$).

Les droites verticales

$$\beta(t) = (x_0, y_0, \pm t)$$

sont à la fois de type B' et de type B''.

Considérons une géodésique $\beta(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de type B' et d'énergie $H = \frac{1}{2}$. On a donc

$$\dot{x} = a e^{2z} \quad , \quad \dot{y} = 0 \quad , \quad \ddot{z} = -e^{-2z} \dot{x}^2 ,$$

par conséquent

$$\ddot{z} = -a^2 e^{2z} .$$

Cette équation à été intégrée au lemme 4.3, la solution est

$$z(t) := z_0 - \log(\cosh(t) - c_0 \sinh(t)) .$$

D'autre part, nous savons que $d = ax + \dot{z}$ est constant, par conséquent

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{d - \dot{z}}{a} &= \frac{d}{a} - \frac{c_0 - \tanh(t)}{a - ac_0 \tanh(t)} \\ &= \frac{d - c_0}{a} + ae^{2z_0} \frac{\sinh(t)}{\cosh(t) - c_0 \sinh(t)} \end{aligned}$$

En résumé, on a le résultat suivant :

Proposition 5.2 *Si $\beta(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{S}$ est une géodésique de type B', alors*

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + ae^{2z_0} \frac{\sinh(t)}{\cosh(t) - c_0 \sinh(t)} \\ y(t) &= y_0 \\ z(t) &= z_0 - \log(\cosh(t) - c_0 \sinh(t)) . \end{cases}$$

avec $x(0) = x_0 = \frac{d - c_0}{a}$.

□

Cette géodésique est la courbe dans le plan $y = y_0$ d'équation

$$(d - ax)^2 + a^2 e^{2z} = 2H = 1 ,$$

son comportement limite est donné par

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \frac{d+1}{a} & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= -\infty & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}(t) &= -1 \end{aligned} \quad (9)$$

Si β est une géodésique de type B", alors on a

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= y_0 + ae^{-2z_0} \frac{\sinh(t)}{\cosh(t) - c_0 \sinh(t)} \\ z(t) &= z_0 + \log(\cosh(t) + c_0 \sinh(t)) . \end{cases}$$

Remarquons que ces formules ne sont rien d'autre que l'expression des géodésiques du plan hyperbolique en coordonnées horocycliques.

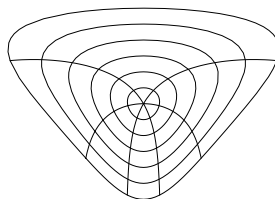


Figure 1: Cercles et droites hyperboliques en coordonnées horocycliques

Plus précisément, si \mathbb{H}^2 est le plan hyperbolique muni de coordonnées horocycliques (x, z) et si (t, φ) sont les coordonnées géodésiques polaires centrée en $(0, 0)$, alors

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + \cos(\varphi) \frac{\sinh(t)}{\cosh(t) - \sin(\varphi) \sinh(t)} \\ z(t) &= -\log(\cosh(t) - \sin(\varphi) \sinh(t)) . \end{cases}$$

L'angle φ représente la direction initiale de β par rapport aux vecteurs $X, Z \in \mathfrak{s}$.

5.3 Les géodésiques de type C

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{S}$ une géodésique de type C. On sait par le théorème 4.1 que $z(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ sont des fonctions périodiques; en particulier $x(t)$ et $y(t)$ sont la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction périodique.

Cela entraîne que les géodésiques de type C oscillent autour d'une droite euclidienne. On verra que cette droite est une géodésique de type A.

Fixons $k \in (0, 1)$ et définissons μ, k' etc. par le tableau 2.

Définition On note $\gamma_{k,0}$ la géodésique vérifiant les conditions initiales $\gamma_{k,0}(0) = (0, 0, 0)$ et $\dot{\gamma}_{k,0}(0) = (\frac{\mu k'}{2}, \frac{\mu k'}{2}, \mu k)$ (en particulier, ses intégrales premières sont $a = b = \frac{\mu k'}{2}$, $d = \mu k$ et $H = \frac{1}{2}$).

Par le théorème 4.1, on sait que $\gamma_{k,0}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) &= f(\mu t - K) + L \mu t + \frac{k}{k'} \\ y(t) &= f(\mu t + K) + L \mu t - \frac{k}{k'} \\ z(t) &= h(\mu t - K). \end{cases} \quad (10)$$

Nous récrivons la géodésique $\gamma_{k,0}$ sous la forme d'un produit dans le groupe \mathcal{S} .

$$\gamma_{k,0}(t) = \left(\frac{k}{k'}, -\frac{k}{k'}, 0\right) \cdot \alpha_{k,0}(t) \cdot \sigma_{k,0}(t)$$

où

$$\alpha_{k,0}(t) = (L \mu t, L \mu t, 0)$$

et

$$\sigma_{k,0}(t) = (f(\mu t - K, k), f(\mu t + K, k), h(\mu t - K, k)).$$

Définition On note $\alpha_{k,\tau}$ et $\sigma_{k,\tau}$ les courbes obtenues par un décalage temporel à partir de $\alpha_{k,0}$ et $\sigma_{k,0}$:

$$\alpha_{k,\tau}(t) = \alpha_{k,0}(t + \tau) \quad , \quad \sigma_{k,\tau}(t) = \sigma_{k,0}(t + \tau).$$

Le résultat principal de cette section dit que toute géodésique de type C telle que $a > 0$ et $b > 0$ est obtenue comme translation à gauche d'une géodésique $\gamma_{k,\tau}$.

Théorème 5.1 Soit γ une géodésique de type C dont les intégrales premières sont a, b , et H .

Supposons $2H = 1$, $a > 0$ et $b > 0$. Alors il existe des constantes $\xi, \eta, \tau \in \mathbb{R}$ telles que

$$\gamma(t) = (\xi, \eta, \bar{z}) \cdot \alpha_{k,\tau}(t) \cdot \sigma_{k,\tau}(t) \quad (11)$$

où k et \bar{z} sont donnés par le tableau 2.

Remarques. La courbe $\alpha(t) = (\xi, \eta, \bar{z}) \cdot \alpha_{k,\tau}(t)$ est une géodésique de type A et de hauteur $\bar{z} = \log \left| \frac{a}{b} \right|$, elle s'appelle le *compagnon* de γ (on observe que \bar{z} est la hauteur moyenne de γ).

La courbe $\sigma = \sigma_{k,\tau}$ est une courbe périodique de période T (cf. tableau 2).

La géodésique γ oscille autour de son compagnon, qu'elle rencontre périodiquement. On dit que $T = T(k)$ est la *période d'oscillation* de γ .

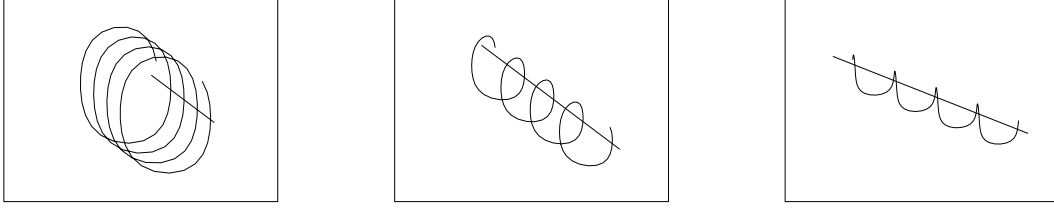


Figure 2: Quelques vues d'une géodésique de type C et de son compagnon.

Preuve du théorème 5.1. Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une géodésique de type C telle que

$$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) \quad , \quad \dot{\gamma}(0) = (a_0, b_0, c_0) .$$

Nous avons

$$2H = \|\dot{\gamma}(0)\|^2 = a_0^2 e^{-2z_0} + b_0^2 e^{2z_0} + c_0^2 = 1 ,$$

et $a = a_0 e^{-2z_0}$ et $b = b_0 e^{2z_0}$.

On pose $\tau := \frac{1}{\mu}(s_0 + K)$ où s_0 est donné par le lemme 4.7, et

$$\begin{aligned} \xi &:= x_0 - e^{\bar{z}}(f(s_0) + L\mu\tau + \frac{k}{k'}) \\ \eta &:= y_0 - e^{-\bar{z}}(f(s_0 + 2K) + L\mu\tau - \frac{k}{k'}) . \end{aligned}$$

Par le théorème 4.1 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est donné par

$$\begin{cases} x(t) &:= \xi + e^{\bar{z}}(f(\mu(t + \tau) - K) + L\mu(t + \tau) + \frac{k}{k'}) ; \\ y(t) &:= \eta + e^{-\bar{z}}(f(\mu(t + \tau) + K) + L\mu(t + \tau) - \frac{k}{k'}) ; \\ z(t) &:= \bar{z} + h(\mu(t + \tau) - K) . \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\xi, \eta, \bar{z}) \cdot \gamma_{k,\tau}(t) \\ &= (\xi, \eta, \bar{z}) \cdot \alpha_{k,\tau}(t) \cdot \sigma_{k,\tau}(t) . \end{aligned}$$

□

L'étude des géodésiques de type C dont les intégrales premières a et b ne sont pas toutes les deux positives se ramène au théorème 5.1 grâce au lemme suivant, dont la preuve est facile.

Lemme 5.1 *Soit γ une géodésique de type C. Alors il existe un élément R du groupe d'isotropie $D(4)$ tel que la géodésique $\tilde{\gamma} = R(\gamma)$ ait pour intégrales premières a et b des constantes positives.*

□

5.4 Géodésiques synodopores.

Deux géodésiques ayant le mêmes compagnon sont dites *synodopores* (δ συνδοιπόρος = “le compagnon de voyage”).

Dans ce paragraphe, nous comptons le nombre de géodésiques synodopores reliant deux points situés sur une même géodésique de type A. Pour cela, nous devons tout d’abord étudier la dépendance de quelques paramètres en fonction du module k .

Observons que des inégalités

$$\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} < \sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)} < \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}},$$

on déduit

$$\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right) K < E < K. \quad (12)$$

Les quantités K, E, k', μ etc. définies par le tableau 2 (de l’appendice) sont des fonctions du module k . Il est clair que $\mu(k)$ et $k'(k)$ sont décroissantes, et, comme $\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}$ est décroissante par rapport à k , on en déduit que la fonction $E(k)$ est décroissante et $K(k)$ est croissante.

Lemme 5.2 *La fonction : $k \rightarrow L(k)\mu(k)$ est strictement croissante et*

$$\lim_{k \rightarrow 1} L(k)\mu(k) = \infty.$$

Preuve. Les dérivées de E et K par rapport à k sont

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k}(E - K) \quad \text{et} \quad \frac{dK}{dk} = \frac{1}{kk'^2}(E - k'^2 K)$$

(voir [21] §3.10). On en déduit, après quelques calculs, que

$$\frac{d(L\mu)}{dk} = \sqrt{2} \frac{(K - E)(E(1 + k^2) - K(1 - k^2))}{k(1 - k^4)^{3/2} K^2}.$$

Cette identité, avec les inégalités (12), prouve que $L\mu$ est strictement croissante.

Pour montrer que $\lim_{k \rightarrow 1} L\mu = \infty$, on observe que la fonction $I(k, \theta) := \sqrt{\frac{1-k^2}{1-k^2(\sin(\theta))^2}}$ tend vers zéro lorsque $k \rightarrow 1$ (si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$), et cette fonction est décroissante car

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1-k^2}{1-k^2(\sin(\theta))^2} \right) = -\frac{2k(\cos(\theta))^2}{(1-k^2(\sin(\theta))^2)^2} < 0.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a donc

$$\lim_{k \rightarrow 1} (k'K) = \lim_{k \rightarrow 1} \int_0^{\pi/2} I(k, \theta) d\theta = 0.$$

D'autre part, $\lim_{k \rightarrow 1} E(k) = 1$, et $\lim_{k \rightarrow 1} \mu(k) = 1$, donc

$$\lim_{k \rightarrow 1} L\mu = \lim_{k \rightarrow 1} \left(\frac{E}{k'K} - \frac{k'}{2} \right) \mu = \infty.$$

□

Corollaire 5.1 *La fonction $k \rightarrow p(k) := L(k)\mu(k)T(k) = 4K(k)L(k)$ est strictement croissante et $\lim_{k \rightarrow 1} p(k) = \infty$.*

Preuve On voit en écrivant $p = 4(L\mu) \cdot (\frac{1}{\mu}K)$ qu'il s'agit d'un produit de fonctions positives et strictement croissantes.

□

Remarque. On a $\lim_{k \rightarrow 0} p(k) = \pi$, donc $k \rightarrow p(k)$ est un difféomorphisme de l'intervalle $(0, 1)$ vers (π, ∞) .

Proposition 5.3 *Soient $O = (0, 0, 0)$ et $P = (p, p, 0) \in \mathcal{S}$ ($p > 0$), et soit n un entier tel que*

$$n\pi < p \leq (n+1)\pi.$$

Alors il existe $2n+1$ géodésiques distinctes reliant O à P .

Preuve La géodésique $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t, t, 0)$ relie O à P . Si $n = 0$, il n'y a donc rien à montrer. Supposons donc $n \geq 1$ et définissons $k_i \in (0, 1)$ par $p(k_i) = p/i$ ($i = 1..n$). Alors, comme $p(k)$ est croissante, on a

$$0 < k_n < k_{n-1} < \dots < k_1.$$

Posons $\gamma_i := \gamma_{k_i, 0}|_{[0, iT_i]}$, alors, pour $1 \leq j \leq i$ on a

$$\begin{aligned} \gamma_i(jT_i) &= ((L_i\mu_i)(jT_i), (L_i\mu_i)(jT_i), 0). \\ &= (jp(k_i), jp(k_i), 0) = \left(\frac{jp}{i}, \frac{jp}{i}, 0\right). \end{aligned}$$

En particulier, $\gamma_i(iT_i) = P$.

Notons

$$\tilde{\gamma}_i := S \circ U \circ \gamma_i$$

(où $S \circ U$ est l'isométrie $(x, y, z) \rightarrow (y, x, -z)$, cf. lemme 1). Alors

$$\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$$

sont $2n + 1$ géodésiques synodopores distinctes reliant O à P . □

Corollaire 5.2 *Le rayon d'injectivité de \mathcal{S} est $\leq \pi\sqrt{2}$.*

En effet, pour tout $p \geq \pi$, il existe au moins trois géodésiques reliant O à $P = (p, p, 0)$. □

Remarque On peut vérifier que

$$J = (1 - \cos(\sqrt{2}t))(X - Y) + \sin(\sqrt{2}t)Z$$

est un champ de Jacobi le long de la géodésique $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t, t, 0)$. Or ce champ s'annule en $t = 0$ et en $t = \sqrt{2}\pi$, donc $(0, 0, 0)$ et $(\pi, \pi, 0)$ sont des points conjugués le long de α .

Proposition 5.4 *De deux géodésiques reliant O à P , la plus courte est celle effectuant le moins d'oscillations.*

Preuve. En reprenant les notations ci-dessus, on a

$$\ell_i := \text{Long}(\gamma_i) = iT_i.$$

Or $\gamma_i(iT_i) = P = ((L_i\mu_i) \cdot (iT_i), (L_i\mu_i) \cdot (iT_i), 0)$, donc

$$\ell_i = iT_i = \frac{p}{L_i\mu_i}.$$

Supposons que γ_i effectue plus d'oscillations que γ_j , i.e. $i > j$, alors $k_i < k_j$, et donc, par le lemme 5.2, on a $L_i\mu_i < L_j\mu_j$ ce qui entraîne $\ell_i > \ell_j$. □

Remarque. Les géodésiques γ_i et $\tilde{\gamma}_i$ sont de la même longueur. Il existe donc (au moins) $n + 1$ longueurs distinctes de géodésiques reliant O à P (ce résultat se trouve également dans [14]).

En résumé, les géodésiques de type C rencontrent périodiquement leur compagnon (qui est une géodésique de type A). Plus la période est longue, plus courte est cette géodésique.



Figure 3: Géodésiques synodopores: la plus courte est celle effectuant le moins d'oscillations.

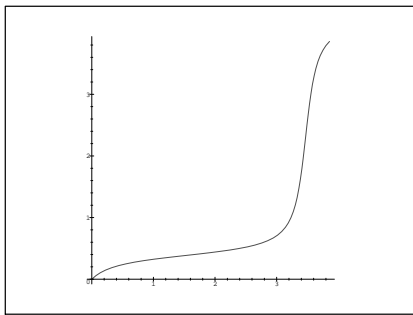


Figure 4: Un segment de $\gamma_{k,0}$ pour $k = 0.5...$

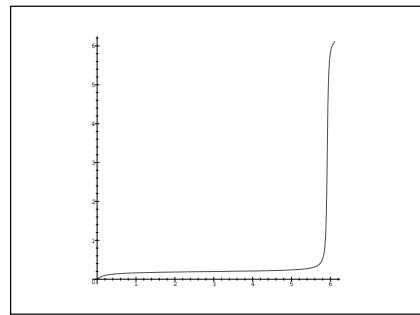


Figure 5: ...et pour $k = 0.8...$

5.5 Proximité des feuilles hyperboliques

Considérons le segment d'une géodésique γ de type C séparant deux rencontres avec son compagnon. A isométrie près, on peut supposer que $\gamma = \gamma_{k,0}$.

En regardant ce segment en projection (euclidienne) sur le plan $\mathcal{F}_0 = Oxy$, on observe qu'il reste proche d'une feuille du feuilletage $\mathcal{H}' = \{dy = 0\}$ durant la première moitié de son parcours et proche d'une feuille du feuilletage $\mathcal{H}'' = \{dx = 0\}$ durant la seconde moitié du parcours. Ce phénomène s'accroît lorsque k croît.

En fait $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est donné par (10), en particulier $\gamma(0) = (0, 0, 0)$, $\gamma(T) = (p, p, 0)$ et

$$x(\frac{1}{2}T) = \frac{p}{2} + 2\frac{k}{k'} \quad , \quad y(\frac{1}{2}T) = \frac{p}{2} - 2\frac{k}{k'} \quad , \quad z(\frac{1}{2}T) = 0$$

où $T = T(k)$ (la période) et $p = p(k)$ sont définis par le tableau 2.

Lemme 5.3 *On a*

$$\lim_{k \rightarrow 1} y(\frac{1}{2}T) = 0.$$

Preuve Remarquons que

$$y(\frac{1}{2}T) = \frac{p}{2} - 2\frac{k}{k'} = \frac{(2E - k'^2K - 2k)}{k'}$$

est de la forme $\frac{0}{0}$ lorsque $k \rightarrow 1$. On applique la règle de l'Hospital; on a

$$\frac{d}{dk}(k') = -2\frac{k}{k'} \rightarrow -\infty \quad (\text{lorsque } k \rightarrow 1).$$

et

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k}(E - K) \quad , \quad \frac{dK}{dk} = \frac{1}{kk'^2}(E - k'^2K) \quad , \quad \frac{d}{dk}(k'^2) = -2k \quad ,$$

donc

$$\frac{d}{dk}(2E - k'^2K - 2k) = \frac{1}{k}(E - k'^2K) - 2 \rightarrow -1 \quad (\text{lorsque } k \rightarrow 1).$$

Et donc

$$y(\frac{1}{2}T) \sim \frac{\frac{d}{dk}(2E - k'^2K - 2k)}{\frac{d}{dk}(k')} \rightarrow \frac{-1}{-\infty} = 0 .$$

□

Avec un peu plus de travail, on peut montrer la

Proposition 5.5 *Soit $\delta : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}$ le chemin obtenu en suivant le segment géodésique $\beta' \subset \mathcal{H}'$ reliant $(0, 0, 0)$ à $(\frac{p}{2}, 0, 0)$ puis le segment géodésique $\beta'' \subset \mathcal{H}''$ reliant $(\frac{p}{2}, 0, 0)$ à $(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}, 0)$. Alors la distance de Hausdorff entre le segment γ et la courbe δ tend vers 0 lorsque $k \rightarrow 1$.*

Il est possible de calculer la longueur de δ (à partir des résultats du paragraphe 5.2 ou en utilisant des formules de distances dans le demi-plan de Poincaré), elle est donnée par

$$\frac{p}{4} = \sinh\left(\frac{\ell(\delta)}{4}\right).$$

Ceci signifie que lorsque p est grand, la distance dans \mathcal{S} entre $(0, 0, 0)$ et $(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}, 0)$ est très proche de $4\text{Arsinh}(\frac{p}{4})$.

6 L'horizon de \mathcal{S}

Il est maintenant clair que tous les rayons géodésiques de \mathcal{S} sont divergents.

Proposition 6.1 *Tout rayon géodésique de type C est asymptote à un rayon géodésique de type A et les seuls rayons géodésiques de \mathcal{S} minimaux sont ceux de type B.*

Preuve Tout rayon géodésique de type A rencontre périodiquement une infinité de rayons géodésiques de type C. Réciproquement, Tout rayon géodésique de type C rencontre périodiquement son compagnon. □

Proposition 6.2 *Tout rayon géodésique de type A ou C est asymptote à l'un et un seul des rayons géodésiques suivants :*

$$\text{Type } A^{\pm\pm} : \quad \alpha_{\bar{z}}^{\pm\pm}(t) = \left(\pm \frac{e^{-2\bar{z}}}{\sqrt{2}} t, \pm \frac{e^{2\bar{z}}}{\sqrt{2}} t, \bar{z} \right).$$

Preuve Toute géodésique de type C est asymptote à son compagnon, qui est une géodésique de type A :

$$\alpha(t) = \left(x_0 \pm \frac{e^{-2\bar{z}}}{\sqrt{2}} t, y_0 \pm \frac{e^{2\bar{z}}}{\sqrt{2}} t, \bar{z} \right).$$

Or cette géodésique est asymptote à $\alpha_{\bar{z}}^{\pm\pm}$. □

Proposition 6.3 *Tout rayon géodésique de type B est asymptote à l'un et un seul des rayons géodésiques suivants :*

$$\text{Type B}' : \quad \beta'_{x_0}(t) = (x_0, 0, -t);$$

$$\text{Type B}'' : \quad \beta''_{y_0}(t) = (0, y_0, t).$$

Preuve Cela découle de la proposition 5.2 et de la discussion qui suit. □

Nous avons donc 6 familles à un paramètre de rayons géodésiques représentant toutes les classes d'équivalence asymptote.

Proposition 6.4 *L'horizon $\mathcal{S}_0^{\min}(\infty)$ est le graphe (séparé) à deux sommets et quatre arêtes obtenu en identifiant deux cercles en deux points (les deux sommets correspondent aux rayons verticaux $(0, 0, t)$ et $(0, 0, -t)$).*

Preuve $\mathcal{S}_0^{min}(\infty)$ est l'espace des rayons géodésiques de type B issus de O . Puisqu'une géodésique β issue de 0 est déterminées par $\dot{\beta}(0) = (a, b, c)$, on peut identifier cet espace à $\{(a, b, c) \in T_0\mathcal{S} : a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ et } ab = 0\}$. \square

Proposition 6.5 *L'horizon $\mathcal{S}_0(\infty)$ est homéomorphe au quotient d'une sphère*

$$\{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 = 1\} / \sim$$

où \sim est la relation d'équivalence:

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') \iff \begin{cases} (a, b, c) = (a', b', c') \\ \text{ou} \\ aba'b' \neq 0 \text{ et } \text{sgn}(a) = \text{sgn}(a') , \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} . \end{cases}$$

Cet espace n'est pas séparé.

Preuve A l'espace précédent, nous devons rajouter les classes asymptotes des géodésiques issues de 0 pour lesquelles $ab \neq 0$. Ces classes asymptotes sont uniquement déterminées par les signes de a et b , ainsi que la hauteur $\bar{z} = \log \left| \frac{a}{b} \right|$ du compagnon. \square

Lorsqu'on étudie tous les rayons géodésiques (issus ou non de O), on obtient les mêmes ensembles de classe asymptotes; mais les horizons ont des topologies différentes.

Pour décrire les espaces topologiques $\mathcal{S}^{min}(\infty)$ et $\mathcal{S}(\infty)$, nous avons besoin d'une

Définition. Soit W un espace topologique. Un arc dans W est un sous-ensemble $A \subset W$ pour lequel il existe une bijection continue

$$\theta : \mathbb{R} \rightarrow A .$$

Un point $w \in W$ est un *point final* de l'arc A si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = w .$$

On note $A_F \subset W$ l'ensemble des points finaux de A .

On ne confondra pas les notions de point final et de point adhérent. Remarquons que si A_F contient plusieurs points, alors W n'est pas séparé.

De la même manière, on dit qu'un point $w \in W$ est un *point initial* de l'arc A si

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = w$$

et on note $A_I \subset W$ l'ensemble des points initiaux de A .

Par exemple, l'espace $\mathcal{S}_0(\infty)$ est obtenu à partir de $\mathcal{S}_0^{min}(\infty)$ en ajoutant quatre arcs $A^{\pm\pm}$ tels que

$$\begin{aligned} B^{+0} &= (A^{++})_I = (A^{+-})_F & B^{0+} &= (A^{-+})_I = (A^{++})_F \\ B^{-0} &= (A^{--})_I = (A^{-+})_F & B^{0-} &= (A^{+-})_I = (A^{--})_F \end{aligned}$$

où B^{+0} , B^{0+} , B^{-0} et B^{0-} sont les quatre arêtes du graphe $\mathcal{S}_0^{min}(\infty)$.

Proposition 6.6 *L'horizon $\mathcal{S}^{min}(\infty)$ est homéomorphe à l'espace $B = B' \sqcup B''$ où $B' = B'' = \mathbb{R}$ et*

$$(B')_F = (B')_I = B'', \quad (B'')_F = (B'')_I = B'.$$

Cet espace est homogène (le groupe des homéomorphismes est transitif).

Proposition 6.7 *L'horizon $\mathcal{S}(\infty)$ est l'espace formé de 6 arcs $B_1 \sqcup B_2 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$ tel que $B = B_1 \sqcup B_2 \simeq \mathcal{S}^{min}(\infty)$ et*

$$(A_i)_F = (A_i)_I = B \quad .$$

Nous omettons la démonstration de ces deux derniers résultats.

A Quelques fonctions elliptiques

Pour la commodité du lecteur, nous donnons quelques rappels sur les fonctions elliptiques. Toutes les formules ci-dessous se prouvent par des calculs routiniers, nous renvoyons le lecteur à [22], [17] ou [21] pour plus d'informations.

Fixons un paramètre $k \in [0, 1]$. Les intégrales elliptiques de Legendre sont les fonctions

$$F(\varphi) = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}},$$

et

$$E(\varphi) = E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} d\theta.$$

(Dans [21], l'intégrale $E(\varphi, k)$ est notée $D(\varphi, k)$). Ces fonctions sont des difféomorphismes de \mathbb{R} ; la fonction amplitude est par définition l'inverse de F

$$\varphi = \text{am}(u) = \text{am}(u, k) \quad \Leftrightarrow \quad u = F(\varphi, k).$$

On introduit ensuite les fonctions elliptiques de Jacobi

$$\text{sn}(u) := \sin(\text{am}(u)) \quad , \quad \text{cn}(u) := \cos(\text{am}(u)) \quad ,$$

et

$$\operatorname{dn}(u) := \operatorname{am}'(u) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\operatorname{am}(u))}$$

Nous étudions quelques propriétés élémentaires des fonctions de Jacobi. Introduisons outre k , les constantes suivantes

$k' = \sqrt{1 - k^2}$	$K = K(k) = F(\frac{\pi}{2}, k)$	$E = E(k) = E(\frac{\pi}{2}, k)$
$L = L(k) = \left(\frac{E}{k'K} - \frac{k'}{2} \right)$	$\mu = \sqrt{\frac{2}{1 + k^2}}$	$T = T(k) = \frac{4}{\mu} K$
$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + k}{1 - k} \right)$	$p = 4K L = L \mu T$	

Tableau 1

Proposition A.1 *Les fonctions de Jacobi vérifient les propriétés suivantes:*

- i. $\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1$;
- ii. $\operatorname{dn}^2(u) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) = k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2(u)$;
- iii. *les fonctions sn et cn sont $4K$ -périodiques;*
- iv. $\operatorname{sn}(u) = -\operatorname{sn}(-u)$ et $\operatorname{cn}(K + u) = -\operatorname{cn}(K - u)$;
- v. *la fonction cn est croissante sur l'intervalle $[-2K, 0]$;*
- vi. *la fonction dn est $2K$ -périodiques;*
- vii. *si $\varphi = \operatorname{am}(u)$, alors $E(\varphi) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(v) dv$;*
- viii. *les dérivées des fonctions de Jacobi sont*

$$\begin{cases} \operatorname{sn}'(u) := \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(u) \\ \operatorname{cn}'(u) := -\operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}(u) \\ \operatorname{dn}'(u) := -k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \end{cases}$$

avec conditions initiales $\operatorname{sn}(0) = 0$ et $\operatorname{cn}(0) = \operatorname{dn}(0) = 1$.

□

On introduit aussi la fonction Zêta de Jacobi

$$\mathcal{Z}(u) = \mathcal{Z}(u, k) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(v) dv - \left(\frac{E}{K}\right) u = E(\varphi) - \left(\frac{E}{K}\right) u$$

(où $\varphi = \operatorname{am}(u)$).

Cette fonction est $2K$ périodique, elle vérifie $\mathcal{Z}(0) = \mathcal{Z}(K) = 0$ et $\mathcal{Z}(-u) = -\mathcal{Z}(u)$, en particulier, \mathcal{Z} est de moyenne nulle.

References

- [1] Alano Ancona *Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary* Ann. Math. (1987), no. 3, 495–536.
- [2] D.F.V. Anosov *Geodesic flow on compact manifold with negative curvature* Trud. Math. Inst. Steklov **90** (1967) (en russe, traduction Amer. Math. Soc. 1969)
- [3] M. Andersen and R. Schoen *Positive Harmonic Functions on Complete Manifolds with Negative Curvature* J. Diff. Geom. **18** (1985) 429–461.
- [4] Vladimir Arnold *Équations Différentielles Ordinaires* Editions Mir, 1974.
- [5] Vladimir Arnold *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* Editions Mir, 1976.
- [6] Yves Benoist, Patrick Foulon et Francois Labourie *Flots d'Anosov à distributions de Liapounov différentiables* Ann.Inst.H.Poincaré Phys. Theor. 53 (1990), no. 4, 395412.
- [7] Werner Ballmann Mikhael Gromov and Viktor Schroeder *Manifolds of nonpositive curvature* Birkhäuser Progress in Mathematics, 61. 1985
- [8] J.L Chabert *Hadamard et les géodésiques des surfaces à courbure négative dans Chaos et déterminismes* Ed. Seuil collection Point Sciences.
- [9] J. Cheeger & D. Ebin *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, 1975.
- [10] P. Eberlein *Geometry of 2-step Nilpotent Groups with a Left Invariant Metric* Ann. scient. Ec.Norm.Sup., (1994) 611–660.
- [11] P.Eberlein and B. O'Neil, *Visibility Manifolds* Pac. J. Math. **46** (1973), 45–109.

- [12] E. Ghys et P. de la Harpe *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov* Birkhäuser, Progress in Math. **83** 1990.
- [13] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine *Riemannian Geometry* 2nd Edition, Springer Verlag Universitext 1990.
- [14] M.A. Grayson *Geometry and growth in three dimensions*. Thesis, Princeton University 1983.
- [15] J. Hadamard *Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques* J. Math. Pures Appl., t. IV, 1898
- [16] W. Klingenberg *Riemannian Geometry* De Gruyter 1995.
- [17] C.G.J Jacobi *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* Regiomonti 1829 (voir C.G.J Jacobi's Gesammelte Werke t.1, Chelsea New-York 1969).
- [18] A. Kaplan *Riemannian Manifolds Attached to Clifford Modules* Geometriae Dedicata, **11** (1981), 127–136.
- [19] A. Kasue *A Compactification of Manifolds with Asymptotically non Negative Curvature* Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **21** (1988) 593–622
- [20] W.P.A. Klingenberg *Riemannian Geometry* de Gruyter Studies in Math. 2nd edition, 1995.
- [21] D.L. Lawden *Elliptic Functions and Applications* Applied Mathematical Sciences 80, Springer-Verlag (1989).
- [22] F.Oberhettinger und W.Magnus *Anwendung Der Elliptischen Funktionen in Physik und Technik* Springer-Verlag 1949.
- [23] B. O'Neil, *Semi-Riemannian Geometry* Academic Press 1983.
- [24] P. Pansu *Flot géodésiques des variétés à courbure négative* in *Séminaire Bourbaki* 738 (1991)
- [25] F. Paulin *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord* J. London Math. Soc **54** (1996) 50–74.
- [26] M. Gromov and P. Pansu *Rigidity of lattices: an introduction* in *Geometric topology: recent developments* DeBartolomeis and Tricerri ed. Springer Lecture Notes in Mathematics, 1504.
- [27] P. Scott *The Geometries of 3-manifolds* Bull. London Math. Soc., **15** (1983), 401–487.
- [28] W. Thurston *Three dimensional Geometry and Topology* Princeton University Press, 1997

Marc Troyanov
Section de Mathématiques
EPFL (Station 8)
CH-1015 Lausanne (Switzerland)
marc.troyanov@epfl.ch