# CONCENTRATION ET INÉGALITÉ DE POINCARÉ

MARC TROYANOV - EPFL

Abstract. Ce texte est un exposé donné le 21 juin 2001 dans le cadre du séminaire Borel, IIIème Cycle Romand de Matématiques. Le thème général était *2001 : An mm-space odyssey : Convergence and Concentration of Metrics and Measures after Misha Gro*mov.
Le présent exposé porte sur la notion de concentration de mesure et les inégalités de Poincaré.

Dans tout l'exposé, $(X, d, \mu)$ désigne un espace métrique muni d'une mesure Borélienne telle que $\mu(X) = 1$.

## 1. Médiane

**1.** On dit que $m$ est une *médiane* de la fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ si

$$\mu(f \geq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu(f \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

**2.** Il n'y a pas nécessairement unicité de la médiane. En fait si on pose

$$m' := \sup\left\{\alpha \,:\, \mu(f \geq \alpha) \geq \frac{1}{2}\right\} \qquad \text{et} \qquad m'' := \inf\left\{\alpha \,:\, \mu(f \leq \alpha) \geq \frac{1}{2}\right\}$$

alors

i) $m'$ et $m''$ sont des médianes;
ii) $m' \leq m''$;
iii) $m$ est une médiane de $f$ s.si $m' \leq m \leq m''$.

**3.** On définit la *médiane centrée* de $f$ (aussi *appelée moyenne de Levy*) par

$$m_f := \frac{m' + m''}{2}$$

Propriétés :

1) $m_f$ est homogène : $m_{cf} = cm_f$,
2) $m_f$ est monotone : $f \leq g \Longrightarrow m_f \leq m_g$.

En général, on n'a pas additivité: $m_{g+f} \neq m_g + m_f$ .

## 2. La fonction isopérimétrique

Pour tout $A \subset X$ mesurable et non vide, on note $A_t = U_t(A) = \{x \,:\, d(x, A) \leq t\}$.

**4. Définition** La fonction

$$\begin{aligned} \alpha_X(t) &:= \sup\left\{\mu(A_t^c) \mid A \subset X \text{ et } \mu(A) \geq \frac{1}{2}\right\} \\ &= 1 - \inf\left\{\mu(A_t) \mid A \subset X \text{ et } \mu(A) \geq \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

définie pour $0 \leq t \leq \operatorname{diam}(X)$ s'appelle la *fonction isopérimétrique* du mm espace $X$.

*Date*: 21 juin 2001.

$\alpha_X$ est donc la plus petite fonction telle que

$$\mu(A) \geq \frac{1}{2} \implies \mu(A_t) \geq 1 - \alpha_X(t).$$

Remarquons que $\alpha_X$ est continue, décroissante, $\alpha_X(0) = \frac{1}{2}$ et $\alpha_X(\mathrm{diam}(X)) = 0$.

**Motivation :** On verra plus loin le rôle joué par cette fonction. A ce stade, mentionnons simplement que la dérivée $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \mu(A_t)$, lorsqu'elle existe, s'appelle le *contenu de Minkowski* et généralise la notion d'aire (dans le cas euclidien, si $A \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine à bord lisse, alors le contenu de Minkowski coïncide avec l'aire du bord $\partial A$. Cela est encore vrai dans une variété riemannienne).

**5. Exemple** Sur la sphère $S^n$ (avec mesure normalisée) on a

$$\alpha_{S^n}(t) = Ce^{-(n-1)t^2/2}$$

(c'est l'inégalité isopérimétrique de Levy).

**6. Proposition** *Pour tout $C \subset X$ mesurable on a :*

$$\mu(C) > \alpha_X(t) \quad \implies \quad \mu(C_t) > \frac{1}{2}$$

*Preuve* : Supposons par l'absurde que $\mu(C_t) < \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} > \mu(C_t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu(C_{t+\varepsilon})$, on peut donc trouver $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $1 - \mu(C_{t+\varepsilon}) > \frac{1}{2}$.
Notons $A := (C_{t+\varepsilon})^c = \{x \mid d(x, C) > t + \varepsilon\}$ le complémentaire de $C_{t+\varepsilon}$. Alors $\mu(A) = 1 - \mu(C_{t+\varepsilon}) > \frac{1}{2}$. Ceci entraîne $\mu(A_t) \geq 1 - \alpha_X(t)$; or $A_t \cap C = \emptyset$ donc

$$1 \geq \mu(C) + \mu(A_t) > \alpha_X(t) + (1 - \alpha_X(t)) = 1$$

ce qui est impossible.

□

**7. Corollaire** *Pour tout $C \subset X$ mesurable on a :*

$$\mu(C) > \alpha_X(t) \quad \implies \quad \mu(C_{2t}) > 1 - \alpha_x(t)$$

□

Ce corollaire nous dit que la fonction $\alpha_X$ permet d'estimer la croissance du volume de toutes les parties de $X$ et non seulement de celles de mesure $\geq \frac{1}{2}$ .

## 3. La fonction de concentration

On note $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(X)$ l'ensemble des fonctions Lipschitziennes bornées $f : X \to \mathbb{R}$ de constante de Lipschitz $k$ (i.e. telles que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$).

**8. Définition** La fonction

$$\beta_X(t) := \sup \{ \mu(|f - m| \geq t) \mid \ f \in \mathcal{F}_1 \text{ et } m \text{ est une médiane}\}$$

s'appelle la *fonction de concentration* du mm-espace $X$.

Cette fonction estime dans quelle mesure une fonction $f \in \mathcal{F}_1$ est concentré vers sa médiane :

$$\mu(|f - m| < t) \geq 1 - \beta_X(t) \ .$$

Remarquons que $\beta_X$ est continue, décroissante, $\beta_X(0) = 1$ et $\beta_X(\mathrm{diam}(X)) = 0$.

**9. Lemme** *Supposons que $\mu(|f - c| \geq t) < \frac{1}{2}$ pour une certaine constante $c$, alors pour toute médiane $m$ de $f$ on a*

$$|m - c| < t.$$

*Preuve.* De $\mu(f \geq c - t) < \frac{1}{2}$ on déduit que $m' > (c - t)$, et de $\mu(f < c + t) < \frac{1}{2}$ on déduit que $m'' < (c + t)$ ($m'$ et $m''$ sont définis au numéro 2). On a donc montré que $(c - t) < m' \leq m'' < (c + t)$. □

**10. Corollaire** *Si* $f \in \mathcal{F}_1$ *et si* $\mu(|f-c| \geq t) < \frac{1}{2}$, *alors on a*

$$\mu(|f-m| \geq 2t) \leq \mu(|f-c| \geq t).$$

*pour toute médiane* $m$ *de* $f$.

Ainsi, le phénomène de concentration se produit toujours à proximité des médianes.

*Preuve.* Si $|f-m| \geq 2t$, alors $|f-c| \geq |f-m| - |c-m| \geq 2t - t = t$, d'où le résultat. □

**11. Proposition** *Pour tout mm-espace on a*

$$\boxed{\alpha_X \leq \beta_X \leq 2\alpha_X.}$$

*Preuve.* Montrons $\alpha_X \leq \beta_X$ : Soit $A \subset X$ une partie mesurable t.q. $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, et posons $f_a(x) := \min\{d(x,A), a\}$. Alors $f_a \in \mathcal{F}_1$ , $f_a \geq 0$ et $m = 0$ est une médiane. D'autre part, si $a > t$, alors $(A_t)^c = \{x \,:\, f_a(x) > t\}$, donc

$$\mu(A_t^c) = \mu(f_a(x) > t) = \mu(|f_a(x) - 0| > t) \leq \beta_X(t).$$

Comme $A$ est arbitraire, on en déduit que $\alpha_X \leq \beta_X$.

Montrons maintenant que $\beta_X \leq 2\alpha_X$ : Soit $f \in \mathcal{F}_1$ et $m$ une médiane.
Notons $A := \{x \in X \mid \; f(x) \leq m \}$; comme $m$ est une médiane, on a $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$ et comme $f$ est 1-Lipschitzienne, on a

$$\{x \in X \mid \; f(x) \leq m + t \} \supset A_t,$$

donc $\{f > m+t\} \subset A_t^c$, d'où l'on tire $\mu(f > m+t) \leq \mu(A_t^c) \leq \alpha_X(t)$.
De même $\mu(f < m - t) \leq \alpha_X(t)$, d'où

$$\mu(|f-m| > t) \leq 2\alpha_X(t).$$

Comme $f$ est arbitraire, on conclut que $\beta_X \leq \alpha_X$.

□

**12. Proposition** *Supposons qu'il existe une fonction* $\phi$ *telle que pour toute* $f \in \mathcal{F}_1$ *on ait* $\mu(|f - \overline{f}| \geq t) \leq \phi(t)$, *où* $\overline{f} = \int_X f d\mu$ *est la moyenne de* $f$. *alors*

$$\boxed{\beta_X(t) \leq 2\phi(t/2).}$$

*Preuve.* On doit montrer que pour toute médiane $m$ de $f$, on a $\mu(|f-m| \geq t) \leq 2\phi(t/2)$. Si $\phi(t/2) \geq \frac{1}{2}$, alors il n'y a rien à monter. Si $\phi(t/2) < \frac{1}{2}$, alors $\mu(|f - \overline{f}| \geq t/2) \leq \phi(t/2) < \frac{1}{2}$ et le corollaire 10 entraîne

$$\mu(|f-m| \geq t) \leq \mu(|f - \overline{f}| \geq t/2) \leq \phi(t/2) \leq 2\phi(t/2).$$

□

**13. Corollaire** *Supposons que pour toute fonction* $f \in \mathcal{F}_1$ *on ait*

$$\int_X \cosh(s(f - \bar{f}))d\mu \leq \psi(s)$$

*où* $\bar{f} := \int_X f d\mu$ *est la moyenne de* $f$ *et* $s > 0$ *est un paramètre. Alors*

$$\beta_X(t) \leq \frac{2\,\psi(s)}{\cosh(\frac{s}{2}t)}.$$

*Preuve.* Puisque $s > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mu\left(\left|f-\bar{f}\right| \geq t\right) &= \mu\left(\cosh(s(f-\bar{f})) \geq \cosh(st)\right) \\ &= \mu\left(\frac{\cosh(s(f-\bar{f}))}{\cosh(st)} \geq 1\right) \\ &\leq \frac{1}{\cosh(st)} \int_X \cosh(s(f-\bar{f}))d\mu \leq \frac{\psi(s)}{\cosh(st).} \end{aligned}$$

On conclut avec la proposition 12. □

**14. Proposition** *Soit $\psi : (X,d,\mu) \to (Y,d,\nu)$ une application $K$-lipschitzienne entre deux espaces mm, et supposons que $\nu = \psi_*\mu$. Alors*

a.) $\beta_Y(Kt) \leq \beta_X(t)$;
b.) $\alpha_Y(Kt) \leq 2\alpha_X(t)$.

*Preuve.* Soit $g : Y \to \mathbb{R}$ une fonction 1-Lipshitzienne, $m$ une médiane de $g$ et $f := \frac{1}{K} g \circ \psi : X \to \mathbb{R}$. Alors $f$ est 1-Lipschitzienne et on a donc

$$\begin{aligned} \nu(|g-m| \geq Kt) &= \mu\{x \in X \mid \ |g\circ\psi(x) - m| \geq Kt\} \\ &= \mu\{x \mid \ |Kf(x) - m| \geq Kt\} \\ &= \mu\{x \mid \ |f(x) - m/K| \geq t\} \\ &\leq \beta_X(t) \end{aligned}$$

ce qui prouve (a). On déduit (b) de (a) et de la proposition 11. □

**15. Proposition** *Notons $\lambda X$ le mm espace obtenu à partir de $(X,d,\mu)$ en multipliant les distances par $\lambda$. Alors*

a.) $\beta_{\lambda X}(\lambda t) = \beta_X(t)$;
b.) $\alpha_{\lambda X}(\lambda t) = \alpha_X(t)$.

*Preuve.* L'assertion (a) découle de la proposition 14 et (b) est facile à vérifier. □

## 4. Suite de Levy

**16. Proposition** *Soit $\{(X_k, d_k, \mu_k)\}$ une suite de mm espaces. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a.) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k(t) = 0$ *pour tout* $t > 0$;
b.) $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k(t) = 0$ *pour tout* $t > 0$;
c.) *Si $A_k \subset X_k$ est une suite de parties telle que $\mu_k(A_k) \geq \delta > 0$ pour tout $k$, alors* $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(U_t(A_k)) = 1$ *pour tout* $t > 0$.

*Preuve.* L'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (b) se déduit immédiatement de la proposition 11.
(a) $\Rightarrow$ (c) découle du corollaire 7 et (c) $\Rightarrow$ (a) est immédiat à partir des définitions. □

**17. Définition** Une suite de mm espaces vérifiant l'une de ces conditions s'appelle une *suite de Lévy*.

**18. Exemples dégénérés**

a) Si $\mathrm{diam}(X_k) \to 0$, alors $X_k$ est une suite de Levy.
b) Si $X_k = X$ est fixe et $\mu_k \to \delta_p$ (= Dirac au point $p \in X$), alors $(X, d, \mu_k)$ est Lévy.

Plus généralement, on dit qu'une suite $X_k$ est une *suite de Lévy dégénérée* s'il existe $D_k \subset X_k$ tel que $\mathrm{diam}(D_k) \to 0$ et $\mu_k(D_k) \to 1$.

**19. Un exemple non dégénéré** Soit $X_k$ une suite de mm espaces telle que

$$\beta_{X_k}(t) \leq \varphi(t)$$

pour tout $k$ où $\varphi$ est une fonction telle que $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$. Si $a_k\to\infty$, alors la suite $Y_k := \frac{1}{a_k}X_k$ est une suite de Lévy (cette suite sera en en général non dégénérée si $\mathrm{diam}(Y_k)\geq\delta>0$).

*Preuve.* Par la proposition 15, on a $\beta_{Y_k}(t)=\beta_{X_k}(a_kt)\leq\varphi(a_kt)\to 0$ lorsque $t>0$ et $k\to\infty$. □

## 5. Energie de Dirichlet

On note $\mathcal{F}_k=\mathcal{F}_k(X)$ l'ensemble des fonctions $f:X\to\mathbb{R}$ qui sont $k-$Lipschitziennes et bornées $\mathcal{F}=\cup_{k>0}\mathcal{F}_k$ l'ensemble de toutes les fonctions Lipschitziennes bornées sur $X$.

**20. Définition.** On appelle *énergie de Dirichlet* une application $\mathcal{E}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes .

D1.) Si $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction convexe et $f\in\mathcal{F}_k$, alors

$$\mathcal{E}(\phi\circ f)\leq k^2\int_X(\phi'\circ f)^2d\mu$$

D2.) (Inégalité de Poincaré). Il existe une constante $C>0$ telle que

$$\mathbb{V}(f)\leq C\,\mathcal{E}(f)$$

où $\mathbb{V}(f):=\int_X\left[f-\left(\int_X f d\mu\right)\right]^2d\mu=\int_X f^2d\mu-\left(\int_X fd\mu\right)^2$ est la variance de $f$.

**21. Remarques :** (i) De (D1), on déduit que pour toute fonction $f\in\mathcal{F}_k$, on $\mathcal{E}(f)\leq k^2$. En effet si $\phi(t)=t$, alors $\phi'=1$ et donc $\mathcal{E}(\phi\circ f)\leq k^2\int_X(1)^2d\mu=k^2$.

(ii) Dans de nombreux exemples, la condition (D1) est vérifiée pour toute fonction $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^1$ (ou même Lipschitzienne); mais en n'exigeant cette condition que pour les fonctions convexes, on obtient beaucoup d'autres exemples intéressants.

**22. Loi d'échelle :** Si $X'=\lambda\dot{X}$ (i.e. $X'$ est l'espace obtenu en multipliant les distances $d(x,y)$ dans $X$ par $r$; la mesure $\mu$ restant inchangée) et si $\mathcal{E}$ est une énergie de Dirichlet dans $X$, alors $\mathcal{E}'(f):=\frac{1}{\lambda^2}\mathcal{E}(f)$ est une énergie sur $X'$ (le facteur $\frac{1}{\lambda^2}$ est nécessaire pour que $\mathcal{E}'$ vérifie la condition (D1) car $\mathcal{F}_k(X)=\mathcal{F}_{k/\lambda}(X')$).
On en déduit que la constante de Poincaré de $(X',\mathcal{E}')$ est donnée par

$$C'=\lambda^2C$$

où $C$ la constante de Poincaré de $(X',\mathcal{E}'$.
Dans le cas où le diamètre est fini, on peut exprimer cela en disant que $C\left(\mathrm{diam}(X)\right)^{-2}$ est invariant par changement d'échelle.

**23. Exemples d'énergies de Dirichlet :**

**a)** Si $X$ est une variété riemannienne close et $\mu$ est la mesure volume normalisée, alors l'énergie de Dirichlet

$$\mathcal{E}(f):=\int_X\|\nabla f\|^2d\mu=-\int_X(f\cdot\triangle f)d\mu$$

vérifie les conditions (D1) et (D2).
Dans cet exemple, la constante de Poincaré est donnée par

$$C=1/\lambda_1$$

où $\lambda_1$ est le première valeur propre non nulle de $-\triangle$.

**b)** Si $X=(V,E)$ est un graphe fini et $\mu$ est la mesure de comptage normalisée, alors l'énergie

$$\mathcal{E}(f) := \sum_{[x,y]\in E} (f(y) - f(x))^2$$

vérifie les conditions (D1) et (D2).

**c)** Soit $X$ un espace métrique quelconque muni d'une mesure de Probabilité $\mu$. Pour tout $f \in L^2(X)$, notons $HD[f]$ l'ensemble des fonctions mesurables $g : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ telles que

$$|f(y) - f(x)| \leq d(x,y)\,(g(x) + g(y))$$

presque-partout (on dit qu'un élément de $HD[f]$ est un $pseudo-gradient$ au sens de Hajlasz de la fonction $f$ ).
L'énergie est alors définie par

$$\mathcal{E}(f) := \inf \left\{ \int_X g^2 d\mu \,\middle|\, g \in HD[f] \right\}.$$

On peut vérifier qu'elle vérifie toujours les conditions (D1) et (D2) (dans la seconde condition, il faut utiliser que $\phi$ est convexe; cela ne marcherait pas pour une fonction $C^2$ quelconque).

**d)** Pour une fonction lipshitzienne $f \in \mathcal{F}$, on définit en chaque point la "dilatation infinitésimale" de $f$ par

$$L_f(x) := \lim_{r\to 0} \sup_{d(x,y)\leq r} \frac{|f(y) - f(x)|}{r},$$

puis l'énergie par

$$\mathcal{E}(f) := \int_X (L_f(x))^2\, d\mu.$$

**e)** On dit qu'une fonction Borel mesurable $g : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est un *sur-gradient* (au sens de Heinonen-Koskela) de la fonction lipshitzienne $f \in \mathcal{F}$, si pour toute courbe rectifiable $\gamma : [0,1] \to X$ on a

$$|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| \leq \int_\gamma g(\gamma(s)) ds.$$

L'énergie est alors définie par

$$\mathcal{E}(f) := \inf \left\{ \int_X g^2 d\mu \,\middle|\, g \text{ est un sur-gradient de } f \right\}.$$

**Remarque** Dans les deux derniers exemples, l'énergie vérifie toujours la condition (1), mais il est facile de construire des espaces mm tels que la condition (2) n'est pas vérifiée. L'inégalité de Poincaré doit donc être démontrée ou supposée.

**24. Définition (Espace de Sobolev)** L'espace de Sobolev $W^{1,2}(X)$ associé à une énergie de Dirichlet est par définition le complété de $\mathcal{F}$ pour la norme

$$\|f\|_{W^{1,2}(X)} = \|f\|_{L^2(X)} + \sqrt{\mathcal{E}(f)}.$$

Il existe donc une grande variétés de notions d'espace de Sobolev sur les espaces métriques mesurés.

## 6. Le Théorème principal

**25. Théorème :** *Soit $\mathcal{E}$ une énergie de Dirichlet sur le mm espace $X$. Alors*

$$\boxed{\beta_X(t) < 16\,\mathrm{e}^{-t/\sqrt{2C}}}$$

*où $C$ est la constante de Poincaré.*

Nous aurons besoins de 2 lemmes.
**26. Lemme:** Si $f \in L^\infty(X)$, alors

$$\lim_{t\to 0}\left(\int_X \mathrm{e}^{tf(x)}d\mu\right)^{1/t} = \exp\left(\overline{f}\right).$$

*Preuve.* Posons $L := \lim_{t\to 0}\log\frac{1}{t}\left(\int_X \mathrm{e}^{tf(x)}d\mu\right)$, alors en utilisant le théorème de convergence dominée et la règle de l'Hospital, on a

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{d}{dt}\left(\int_X \mathrm{e}^{tf(x)}d\mu\right)}{\int_X \mathrm{e}^{tf(x)}d\mu} = \lim_{t\to 0}\frac{\int_X f\,\mathrm{e}^{tf(x)}d\mu}{\int_X \mathrm{e}^{tf(x)}d\mu} = \frac{\int_X f\,d\mu}{\int_X 1 d\mu} = \bar{f}\ .$$

□

**27. Lemme :** *Le produit infini*

$$\gamma(s) := \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-C\frac{s^2}{4^{k+1}}}\right)^{2^k}$$

*converge pour tout $s \in (-\frac{4}{\sqrt{C}}, \frac{4}{\sqrt{C}})$.*
*De plus, $s \to \gamma(s)$ est croissant sur l'intervalle $[0, \frac{4}{\sqrt{C}})$ et pour $s = \sqrt{\frac{2}{C}}$ on a $\gamma(s) \simeq 1.681 < 2$.*

*Preuve.* Notons $a_k = a_k(s) = \left(\frac{1}{1-C\frac{s^2}{4^{k+1}}}\right)^{2^k}$ le terme général de ce produit. Alors pour $|s| < \frac{4}{\sqrt{C}}$, et $k \geq 1$, on a $a_k > 1$.
Notons $b_k := \log(a_k) = -2^k\log\left(1-C\frac{s^2}{4^{k+1}}\right)$; pour $k$ assez grand, on a $x_k := C\frac{s^2}{4^{k+1}} \leq \frac{1}{2}$ et donc

$$b_k \leq 2^k\cdot(2\log(2))\cdot C\frac{s^2}{4^{k+1}} = \frac{1}{2^k}\cdot\left(\frac{1}{2}Cs^2\log 2\right)$$

(car $0 \leq -\log(1-x) \leq (2\log(2))\cdot x$ pour tout $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$).
Ainsi $\sqrt[k]{b_k} \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}Cs^2\log 2\right)^{1/k}$ et donc

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{b_k} = \frac{1}{2} < 1$$

ce qui entraîne que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge et donc $\gamma(s) = \prod_{k=1}^{\infty} a_k(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) < \infty$.

La croissance de $\gamma(s)$ est évidente puisque chaque $a_k(s)$ est une fonction croissante de $s$.
La valeur $\gamma(\sqrt{\frac{2}{C}}) \simeq 1.681$ est obtenue numériquement. □

**28. Preuve du Théorème 25.** Soit $f \in \mathcal{F}_1$ quelconque et posons $f_s := \exp\left(\frac{s}{2}f\right)$, alors les conditions (D1) et (D2) entraînent

$$\mathbb{V}(f_s) \leq C\,\mathcal{E}(f_s) \leq \left(C\frac{s^2}{4}\right)\int_X \mathrm{e}^{sf}d\mu$$

(car $\phi(t) = \mathrm{e}^{\frac{s}{2}t}$ est convexe et $\phi'(t) = \frac{s}{2}\mathrm{e}^{\frac{s}{2}t}$).

Or $\mathbb{V}(f_s) = \left(\int_X \mathrm{e}^{sf} d\mu\right) - \left(\int_X \mathrm{e}^{\frac{s}{2}f} d\mu\right)^2$, on peut donc récrire cette inégalité sous la forme

$$\int_X \mathrm{e}^{sf} d\mu \leq \frac{1}{\left(1 - C\frac{s^2}{4}\right)} \left(\int_X \exp\left(\frac{s}{2}f\right) d\mu\right)^2$$

(à condition que $\left(1 - C\frac{s^2}{4}\right) > 0$, i.e. $|s| < \frac{2}{\sqrt{C}}$).
En itérant cette inégalité (i.e. en l'appliquant à $\frac{s}{2^k}$) on obtient

$$\int_X \mathrm{e}^{sf} d\mu \leq \left[\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1 - C\frac{s^2}{4^{k+1}}}\right)^{2^k}\right] \left(\int_X \exp\left(\frac{s}{2^n}f\right) d\mu\right)^{2^n}$$

En passant à la limite (lorsque $n \to \infty$) dans l'inégalité précédente et en utilisant les lemmes 27 et 28, nous obtenons

$$\int_X \mathrm{e}^{s(f-\overline{f})} d\mu \leq \frac{\gamma(s)}{1 - C\frac{s^2}{4}}$$

pour tout $s \in (-\frac{2}{\sqrt{C}}, \frac{2}{\sqrt{C}})$. Cette inégalité entraîne

$$\int_X \cosh(s(f-\overline{f})) d\mu = \frac{1}{2}\int_X \mathrm{e}^{s(f-\overline{f})} d\mu + \frac{1}{2}\int_X \mathrm{e}^{-s(f-\overline{f})} d\mu \leq \frac{\gamma(s)}{1 - C\frac{s^2}{4}}.$$

Par le corollaire 13, on a donc

$$\beta_X(t) \leq \frac{2\gamma(s)}{\cosh(\frac{s}{2}t)\left(1 - C\frac{s^2}{4}\right)}.$$

Choisissons $s = \sqrt{\frac{2}{C}}$, alors $\frac{2}{\left(1 - C\frac{s^2}{4}\right)} = 4$ et $\gamma(s) < 2$ donc

$$\beta_X(t) < \frac{8}{\cosh(t/\sqrt{2C})} \leq 16\mathrm{e}^{-t/\sqrt{2C}}.$$

□

## 7. Applications

**Variétés riemanniennes**

**29. Théorème :** *Soit $X$ une variété Riemannienne compacte sans bord, $\mu$ la mesure riemannienne normalisée (i.e. $\mu(X) = 1$) et $\lambda_1$ la première valeur propre du Laplacien. Alors on a*

$$\boxed{\beta_X(t) \leq 16\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}t}}$$

**30. Exemple** Si $X = S^n$, alors $\lambda_1 = n$ et on obtient la loi de concentration sur les sphères :

$$\mu(|f-m| \geq 2t) \leq 12e^{-\sqrt{n/2}t}$$

Remarque : Comparer avec l'estimation $\mu(|f-m| \geq \varepsilon) \leq Ce^{-(n-1)\varepsilon^2/2}$ obtenue par une autre méthode.

**31. Corollaire** Si $X_k$ est une suite de variétés telle que $\lambda_1(X_k) \to \infty$, alors c'est une suite de Lévy.

**32. Corollaire** Si $Y_k$ est une suite de variétés telle que $\lambda_1(Y_k) \geq \lambda > 0$ pour tout $k$, et si $a_k \to \infty$, alors la suite $\frac{1}{a_k} Y_k$ est une suite de Lévy.

*Preuve.* On sait que $\lambda_1(\frac{1}{a_k} Y_k) = a_k^2 \lambda_1(Y_k) \geq a_k^2 \lambda \to \infty$. On conclut par le théorème précédent.

(Autre argument : par le théorème 17, on a $\beta_{Y_k}(t) \leq 12\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}t}$ pour tout $k$. On conclut à partir de l'exemple 16.)

□

**33. Exemple** Soit $T^k = S^1 \times S^1 \times S^1 \cdots \times S^1$ le tore de dimension $k$. Alors $\lambda_1(T^k) = \lambda_1(S^1) = 1$ pour tout $k$ et $\mathrm{diam}(T^k) = \pi\sqrt{k}$. Donc $\frac{1}{\sqrt{k}} T^k$ est une suite de Lévy de diamètre constant (et non dégénérée puisque $T^k$ est homogène).

□

**Graphes expanseurs**

**34. Définition** Un "*graphe expanseur*" d'ordre $m$ est une suite de graphes $\{X_k = (V_k, E_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

(1) Chaque $X_k$ est un graphe fini et $\sharp V_k \to \infty$;
(2) chaque sommet de $X_k$ est de valence $m$;
(3) pour tout $A \subset V_k$ avec $\sharp A \leq \frac{1}{2}\sharp V_k$, on a l'inégalité isopérimétrique
$$\sharp\partial A \geq (e_o - 1)\sharp A$$
où $e_0 > 1$ est indépendant de $A$ et de $k$ ($e_0$ s'appelle la constante d'expansion).

La métrique sur chaque $X_k$ est donnée par le nombre minimal d'arêtes séparant deux sommets. Chaque $X_k$ est donc un mm-espace (la mesure est la mesure de comptage normalisée).
Il est alors facile de montrer qu'un graphe expanseur possède une constante de Poincaré uniforme. En utilisant le théorème 25 et l'exemple 19, on obtient donc :

**35. Proposition :** *Si* $\{X_k = (V_k, E_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *est un graphe expanseur, alors* $\left\{Y_k := \frac{1}{\sharp V_k} X_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Lévy.*

□