ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

La théorie mathématique de la musique selon Leonhard Euler

Yannis Paquier

Projet de semestre
Printemps 2008

Professeur responsable : Jacques Sesiano

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous allons étudier la théorie mathématique de la musique que Leonhard Euler a exposée dans un ouvrage publié en 1739, intitulé *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae (Essai d'une nouvelle théorie de la musique, exposée en toute clarté selon les principes de l'harmonie les mieux fondés)*, ainsi que dans quelques articles qu'il écrira par la suite.

Leonhard Euler veut expliquer pourquoi la musique apporte du plaisir à celui qui l'écoute et aussi pourquoi une même musique peut paraître plaisante à une personne et déplaisante à une autre. Il base son raisonnement sur l'hypothèse suivante : l'être humain ressent du plaisir s'il peut percevoir la perfection. Et cette perfection se résume à la perception d'un certain ordre.

Dans la musique, l'ordre vient du rapport entre les sons entendus. En effet, selon Euler, chaque son peut être représenté par un nombre. Les accords de musique deviennent donc des rapports de nombres. Ainsi, un accord est agréable à écouter si nous arrivons à percevoir l'ordre qui y règne, donc à comprendre les proportions entre les sons. En résumé, un accord représenté par un rapport simple sera plus agréable qu'un accord représenté par un rapport compliqué. Se basant sur ces hypothèses, Leonhard Euler va classer les accords en différentes catégories, qu'il nomme les *degrés de douceur* (ou degrés d'agrément).

Après une courte présentation de la vie du mathématicien et un bref rappel de quelques notions fondamentales de la musique, nous présenterons comment Euler classe les différents accords à partir de plusieurs règles qu'il appelle les *principes de l'harmonie*. Par la suite, nous verrons comment appliquer ces mêmes règles à des suites d'accords.

Arrivés à ce stade, nous parlerons d'une autre partie de sa théorie de la musique : l'étude de différentes gammes. Nous nous intéresserons en particulier à la gamme diatonico-chromatique. En effet, nous verrons comment Leonhard Euler calcule les nombres associés aux douze tons de cette gamme, qui se rapproche de très près de la gamme utilisée encore aujourd'hui dans la musique. Nous aurons alors vu les principales idées de son *Tentamen*.

Nous étudierons ensuite deux articles où Leonhard Euler explique pourquoi certains accords, trop compliqués selon sa théorie pour être utilisés dans la musique, se retrouvent néanmoins fréquemment en usage dans des oeuvres musicales.

Pour terminer, nous présenterons brièvement deux autres théories. Nous verrons un classement des intervalles de la musique dû à Mersenne, avant de nous intéresser à la théorie de la musique de d'Alembert.

1 Vie de Leonhard Euler (1707-1783)

Commençons ce travail par une présentation de la vie de Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg. Ces éléments biographiques sont essentiellement issus de l'article de Myriam Fisher intitulé *Leonhard Euler et la musique* [1] et du livre *Leonhard Euler : Un génie des Lumières* [2].

Son enfance en Suisse

Paul Euler (1670-1745), le père de Leonhard Euler, est pasteur. Il souhaite que son fils suive sa trace et devienne à son tour pasteur, mais ayant suivi des cours donnés par le mathématicien bâlois Jakob Bernoulli, il possède également une base solide en mathématiques. Il fera découvrir cette science à son fils. Paul Euler est également un ami proche de Johann Bernoulli, qui est à la tête de la chaire de mathématiques de l'université de Bâle de 1705, date à laquelle il succède à son frère Jakob, jusqu'en 1748. Leonhard Euler y suivra une formation en mathématiques et y étudiera également la théologie, la médecine, l'astronomie et la physique.

Départ pour Saint-Pétersbourg

En 1727, Leonhard Euler part pour Saint-Pétersbourg rejoignant ainsi les fils de Johann Bernoulli, Daniel et Nicolaus, à l'Académie des sciences de Russie. Il occupera la chaire de physique dès 1730 et celle de mathématiques dès 1732. Il y remplace alors Daniel Bernoulli. En 1731, Euler termine l'écriture de son principal ouvrage sur la musique, publié en 1739, le *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*. En 1733, il épouse Katharina Gsell avec qui il aura treize enfants. Parmi eux, cinq seulement arriveront à l'âge adulte.

Ses années à Berlin

En 1740, Euler répond favorablement à un appel du roi de Prusse Frédéric II et s'installe à Berlin où il sera directeur de la section de mathématiques et de physique de l'Académie de Berlin. En 1759, lorsque le président de l'Académie décède, Euler n'est pas nommé à sa place par Frédéric II. Euler, qui entretenait déjà des rapports peu amicaux avec le roi de Prusse, décide en 1766 de quitter Berlin et de retourner à Saint-Pétersbourg. C'est pendant ce séjour à Berlin, de 1760 à 1762, que Leonhard Euler entretient une correspondance avec la princesse Sophie Friederika Charlotte Leopoldine von Brandenbourg-Schwedt (1745-1808) dont le frère était un lointain cousin de Frédéric II et un ami d'Euler. Cette correspondance donnera naissance aux *Lettres à une princesse d'Allemagne* [3], publiées en 1768 à Saint-Pétersbourg, ouvrage dans lequel nous trouvons quelques lettres où il reprend de façon simplifiée sa théorie du *Tentamen*. En 1764, Euler écrit encore deux articles, *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* [4] et *Du véritable caractère de la musique moderne* [5], qui complètent sa théorie de la musique.

De retour à Saint-Pétersbourg, Euler, qui avait déjà perdu la vue de l'oeil droit en 1735, devient presque aveugle mais continue néanmoins ses activités en dictant ses textes à ses élèves. En 1773, il perd sa femme. Le 18 septembre 1783, il meurt d'une hémorragie cérébrale.

2 Quelques notions de base de la musique

Avant d'exposer la théorie de Leonhard Euler, nous donnons dans ce chapitre quelques notions de base de la musique indispensables à la bonne compréhension de la suite de ce travail.

Le nom des notes

Dans la musique occidentale, les noms donnés aux notes de musique sont les suivants : *do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* et *si*. Dans ce travail, nous allons utiliser la notation anglo-saxonne, qui utilise les sept premières lettres de l'alphabet. Les lettres A, B, C, D, E, F et G représentent respectivement les notes *la*, *si*, *do*, *ré*, *mi*, *fa* et *sol*. Ces sept notes sont celles que nous pouvons entendre en appuyant sur les touches blanches du clavier d'un piano (voir la figure 1). Les touches noires permettent d'obtenir cinq autres notes que nous notons par le symbole $\#$, appelé *dièse*, ou par le symbole b, appelé *bémol*. Par exemple, la note se trouvant entre le *do* et le *ré* est le *do dièse*, notée $C\#$, ou le *ré bémol*, noté Db. Par souci de simplification, nous utiliserons uniquement la notation avec les dièses.

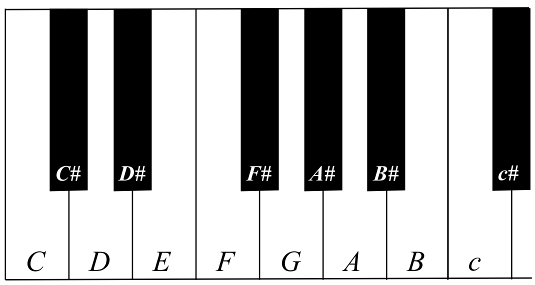

FIG. 1 – les douze notes de la gamme sur le clavier d'un piano.

Le nom des intervalles

Dans la musique, un intervalle définit l'écart entre deux notes. Dans le tableau suivant, nous présentons quelques intervalles qui nous seront utiles dans la suite de ce travail. Nous prenons la note C comme ton de référence. Par exemple, la quinte de C est le G, mais il est possible évidemment de trouver la quinte de n'importe quelle autre note de musique comme par exemple celle de $A\#$ qui est le ton F. C'est pour cette raison que nous avons mis, dans la troisième colonne du tableau, le nombre de demi-tons contenus dans cet intervalle, c'est-à-dire le nombre de touches d'un piano (blanches et noires) que nous trouvons entre les deux notes formant l'intervalle, note d'arrivée comprise. En reprenant notre exemple de l'invervalle de C à G, nous pouvons voir sur la figure 1 qu'entre ces deux notes nous avons sept demi-tons ($C\#$, D, $D\#$, E, F, $F\#$ et G). Pour trouver la note supérieure d'un intervalle à partir d'une note donnée, il suffit donc de compter le bon nombre de demi-tons. Il devient ainsi facile de trouver n'importe quel intervalle à partir de n'importe quelle note, soit en regardant la figure 1, soit en se mettant directement devant un piano.

Nom	Intervalle	Nombre de demi-tons
Octave	de C à c	12
Demi-ton	de C à $C\#$	1
Seconde	de C à D	2
Tierce mineure	de C à $D\#$	3
Tierce majeure	de C à E	4
Quarte	de C à F	5
Quinte	de C à G	7
Sixte mineure	de C à $G\#$	8
Sixte majeure	de C à A	9
Septième mineure	de C à $A\#$	10
Septième majeure	de C à B	11

La dernière notion de musique dont nous avons besoin avant de passer à la théorie de Leonhard Euler est celle de l'accord. En musique, un accord est un ensemble de plusieurs notes jouées simultanément. Si cet accord est agréable à écouter, nous parlons d'accord consonant ou de consonance. Au contraire, s'il est désagréable, nous parlons d'accord dissonant ou de dissonance.

3 Les principes de l'harmonie

Regardons à présent en détail la théorie de la musique d'Euler, en commençant par nous intéresser à ce qu'il présente dans le deuxième chapitre de son *Tentamen*[1]. Tout le raisonnement d'Euler a pour but d'expliquer pourquoi nous prenons plaisir à écouter de la musique et pourquoi une musique qui plaît à une personne peut paraître déplaisante à une autre. Mais avant de nous occuper de la façon dont Euler explique comment, selon lui, la musique peut procurer du plaisir, nous présentons son idée sur la façon dont un son est perçu par l'oreille.

3.1 Sur la perception du son

Leonhard Euler définit un son comme une suite de battements réguliers, c'est-à-dire que l'espacement temporel entre deux battements est toujours le même. L'idée d'Euler est de représenter le son par une suite de points également espacés entre eux. Ceci permet de visualiser ce que l'oreille entend. Ainsi, un accord sera représenté par une superposition de plusieurs suites de points. Considérons le plus simple des accords, celui constitué de 2 sons et regardons les deux exemples illustrés par la figure 2.

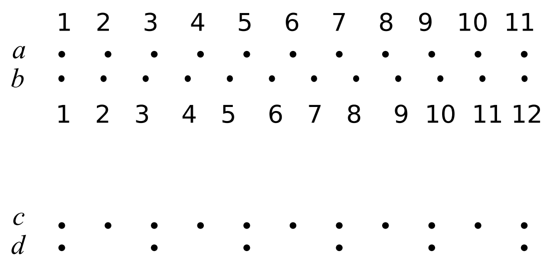

FIG. 2 – Représentation de deux accords à deux sons.

Nous pouvons remarquer que sur l'accord formé des sons a et b, le son a fait onze battements pendant que le b en fait douze. Mais sans numéroter les points, il est très difficile de distinguer cette proportion, il en sera de même pour distinguer les deux sons à l'oreille. En revanche, il est particulièrement aisé de remarquer sur l'accord formé des sons c et d, que le son c fait exactement deux battements pendant que le son d n'en fait qu'un.

3.2 La musique comme vecteur de plaisir

Selon Euler, l'homme ressent du plaisir s'il peut percevoir de la perfection. De plus, la perception d'un certain ordre implique un sentiment de perfection. Ces deux hypothèses lui permettent d'expliquer pourquoi une même musique

[1] *Leonhard Euler's Tentamen novae theoriae musicae : a translation and commentary* [6], chapitre II, pages 65 à 86.

peut plaire ou déplaire selon la personne qui l'écoute. En effet, cette différence vient du fait que certaines personnes y perçoivent l'ordre tandis que d'autres n'y arrivent pas.

Il explique aussi pourquoi une musique peut véhiculer divers sentiments, tels que la joie ou la tristesse, tout en restant quelque chose de plaisant. Si l'ordre est perçu facilement, ce sera la joie qui prédominera. Au contraire, si l'ordre est difficile à percevoir, ce sera la tristesse.

Dans la musique, trois éléments peuvent contenir un certain ordre. Les deux principaux sont les tons et la durée. Le troisième est l'intensité. Par exemple, en ce qui concerne la durée, nous pouvons ainsi expliquer pourquoi les sons graves doivent durer plus longtemps que les sons aigus. En effet, le nombre de battements d'un son grave dans un temps fixé étant plus petit que celui d'un son aigu, il faudra plus de temps pour le comprendre, c'est-à-dire pour percevoir l'ordre.

3.3 Les degrés de douceur

Fort des observations décrites à la section précédente, Euler va classer les tons en différentes catégories qu'il nomme les *degrés de douceur*. Plus il est facile de percevoir l'ordre du ton, plus son degré de douceur sera bas. Ainsi, si un ton appartient au troisième degré de douceur, il sera plus facile de percevoir son ordre que celui d'un ton appartenant au quatrième degré. Regardons donc comment Leonhard Euler classe les différents tons. Pour cela, reprenons la représentation des sons par des points que nous avons présentée à la section 3.1.

```
1 • • • • • • • • • • • • •


2 • • • • • • • • • • • • •
1 •   •   •   •   •   •   •


3 • • • • • • • • • • • • •
1 •     •     •     •     •


4 • • • • • • • • • • • • •
1 •       •       •       •
```

FIG. 3 – Représentation des tons dont l'ordre est le plus facile à percevoir.

Nous nous fixons un ton de référence auquel nous attribuons le chiffre 1. Comme illustré par la figure 3, le ton dont l'ordre est le plus facile à percevoir est l'unisson (la première suite de point sur la figure), c'est-à-dire, le ton qui fait exactement le même nombre de battements que le ton de référence dans un temps fixé. Il appartient donc au premier degré de douceur.

Le deuxième ton le plus facile à comprendre est celui qui fait exactement deux battements pendant que le ton de référence en fait un, nous le notons (1 : 2). Ceci est illustré par la deuxième et la troisième suite de points sur la figure 3. Euler le place donc dans le deuxième degré de douceur.

Les tons qui font respectivement trois et quatre battements pendant que le ton de référence en fait un (notés (1 : 3) et (1 : 4) respectivement) seront placés tous les deux dans le troisième degré de douceur car il n'est pas aisé de décider si l'un est plus simple que l'autre.

Des observations précédentes, Euler tirera quelques règles permettant de calculer le degré de douceur d'un ton :

- (1 : 1), (1 : 2), (1 : 4) appartenant aux degrés 1, 2, et 3, il est naturel d'attribuer à (1 : 8) le degré 4, à (1 : 16) le degré 5, et ainsi de suite. Il pose donc que $(1 : 2^n)$ appartient au degré de douceur $n + 1$:

$$\deg(1 : 2^n) = n + 1.$$

- Remarquant que (1 : 4) ne peut pas être considéré comme plus difficile à percevoir que (1 : 3), et ceci même si 4 est plus grand que 3, il en déduit que si le nombre k associé à l'unité dans le rapport $(1 : k)$ est composé, alors son degré de douceur devient plus petit. En revanche, si le nombre est premier, son degré de douceur doit être associé à la grandeur du nombre. Par exemple, (1 : 5) doit être plus facile à comprendre que (1 : 7), même s'il peut être plus compliqué que (1 : 8). Ainsi, observant que (1 : 2) et (1 : 3) appartiennent aux degrés 2 et 3 respectivement, il s'ensuit que (1 : 5) et (1 : 7) doivent appartenir aux degrés 5 et 7 respectivement. Il pose donc que $(1 : p)$ appartient au degré p pour p premier :

$$\deg(1 : p) = p \text{ pour } p \text{ premier.}$$

- De la première règle, il déduit alors que si $(1 : k)$ appartient au degré m, alors par doublement, le degré de $(1 : 2k)$ sera $m + 1$, celui de $(1 : 4k)$ sera $m + n$ et ainsi de suite. Nous aurons alors la relation suivante :

$$\deg(1 : 2^n k) = m + n.$$

Euler s'intéresse ensuite au degré de douceur de $(1 : pq)$ avec p et q des nombres premiers. Il pose alors :

$$\deg(1 : pq) = p + q - 1.$$

Sa justification est la suivante : le rapport $\frac{pq}{p}$ étant égal à $q = \frac{q}{1}$, le degré de $(1 : pq)$ doit excéder p de la même valeur que q excède 1. Ainsi, nous avons bien que $(1 : pq)$ appartient au degré $p + q - 1$. Généralement, si $\deg(1 : P) = p$ et $\deg(1 : Q) = q$ pour P et Q des nombres entiers, alors :

$$\deg(1 : PQ) = p + q - 1 \tag{1}$$

Utilisant plusieurs fois cette relation, nous obtenons les degrés de douceur de $(1 : p^n)$ avec p premier. En effet :

$$\begin{aligned}
\deg(1 : p^2) &= p + p - 1 = 2p - 1 \\
\deg(1 : p^3) &= \deg(1 : p^2 p) = (2p-1) + p - 1 = 3p - 2 \\
&\vdots \\
\deg(1 : p^n) &= np - n + 1
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $(1 : q^m)$ appartient au degré de douceur $mq - m + 1$, la relation 1 implique que

$$\deg(1 : p^n q^m) = np + mq - n - m + 1.$$

De là, Leonhard Euler tire sa règle générale : Le degré de douceur de $(1 : P)$ est égal à la somme des facteurs premiers de P de laquelle il faut soustraire le nombre de facteurs moins un. Nous pouvons réécrire cette règle de la façon suivante :

$$\text{Si } P = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}, \text{ alors } \deg(1 : P) = \sum_{i=1}^{k} (n_i p_i - n_i) + 1.$$

Exemple. Pour illustrer la règle ci-dessus, calculons le degré de douceur de $(1 : 72)$. Etant donné que $72 = 2^3 \cdot 3^2$,

$$\deg(1 : 72) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 - 2 + 1 = 8.$$

Considérons à présent les rapports de plus de deux tons, c'est-à-dire des rapports de la forme $(1 : p_1 : p_2 : \cdots : p_k)$. Selon Euler, si p et q sont des premiers distincts, $(1 : p : q)$ est perçu aussi aisément que $(1 : pq)$. Ces deux rapports appartiennent donc au même degré. En revanche, $(1 : p : p)$ appartiendra au même degré de douceur que $(1 : p)$ et non $(1 : p^2)$. En effet, si nous reprenons la représentation des sons par des suites de points comme illustré par la figure 4, il apparaît clairement que $(1 : p : p)$ sera perçu aussi aisément que $(1 : p)$.

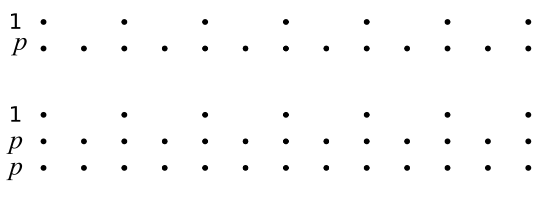

FIG. 4 – Représentation des rapports $(1 : p)$ et $(1 : p : p)$.

Il s'ensuit que si p, q, r, s sont des nombres premiers, $(1 : pr : qr : ps)$ sera perçu comme $(1 : pqrs)$ où il apparaît que $pqrs$ est le plus petit multiple commun (noté ppmc) de pr, qr et ps. Par conséquent :

$$\deg(1 : p_1 : p_2 : \cdots : p_k) = \deg(\mathrm{ppmc}(p_1, p_2, \cdots, p_k)).$$

La tableau suivant donne les dix premiers degrés de douceur, représentés par les chiffres romains, en classant les nombres k des rapports $(1 : k)$.

I	1
II	2
III	3, 4
IV	6, 8
V	5, 9, 12, 16
VI	10, 18, 24, 32
VII	7, 15, 20, 27, 36, 48, 64
VIII	14, 30, 40, 54, 72, 98, 126
IX	21, 25, 28, 45, 60, 80, 81, 108, 144, 192, 256
X	24, 50, 56, 90, 120, 160, 162, 216, 288, 384, 512

Finalement, si le rapport considéré n'est pas unitaire, donc de la forme $(p_1 : p_2 : \cdots : p_k)$ avec $p_1 \neq 1$, la façon de procéder est à peu près similaire. Pour commencer, il faut diviser tous les p_i par leur plus grand diviseur commun (noté pgdc), puis considérer leur plus petit multiple commun m. Pour connaître le degré de douceur de $(p_1 : p_2 : \cdots : p_k)$, il suffit alors de regarder à quel degré appartient m.

Exemple. Considérons le rapport suivant : $(4 : 6)$. Nous avons $\mathrm{pgdc}(4, 6) = 2$. Divisant alors le rapport par 2, nous obtenons :

$$\deg(4 : 6) = \deg(\mathrm{ppmc}(2, 3)) = \deg(6) = 4.$$

4 Accords et successions d'accords

Nous avons vu que plus un rapport du type $(p_1 : p_2 : \cdots : p_k)$ a un degré de douceur petit, plus les tons associés aux p_i sembleront agréables à l'oreille, nous allons maintenant appliquer ceci aux accords de musique. Nous commencerons par nous intéresser aux accords à deux tons avant de généraliser aux accords à plusieurs tons. Un accord seul ne pouvant pas apporter beaucoup de plaisir, nous verrons ensuite comment savoir si une succession de plusieurs accords sera agréable ou non pour l'oreille.

Un accord est défini comme étant plusieurs tons joués simultanément, il peut donc être représenté de la manière suivante : $(p_1 : p_2 : \cdots : p_k)$. Il s'ensuit que grâce aux règles vues au chapitre précédent, nous pouvons savoir si un accord est agréable en regardant le degré de douceur du plus petit multiple commun des p_i en ayant pris soin auparavant de les diviser par leur plus grand diviseur commun si celui-ci est différent de 1. Leonhard Euler attribue le terme *exposant* à ce nombre. En d'autres termes, l'exposant d'un accord est le plus petit multiple commun des tons qui le composent.

4.1 Les accords à deux tons

Comme déjà vu au chapitre précédent, l'accord à deux tons dont l'ordre est le plus facile à percevoir est celui contenu dans le rapport (1 : 2), appelé l'octave, qui appartient au deuxième degré de douceur. Viennent ensuite les accords (1 : 3) et (1 : 4) qui appartiennent au troisième degré. Les différentes règles vues à la section 3.3 nous permettent de classer tous les accords à deux tons selon leurs degrés de douceur. Le tableau suivant donne les accords appartenant aux dix premiers degrés de douceur, notés par les chiffres romains.

II	(1 : 2)
III	(1 : 3), (1 : 4)
IV	(1 : 6), (2 : 3), (1 : 8)
V	(1 : 5), (1 : 9), (1 : 12), (3 : 4), (1 : 16)
VI	(1 : 10), (2 : 5), (1 : 18), (2 : 9), (1 : 24), (3 : 8), (1 : 32)
VII	(1 : 7), (1 : 15), (3 : 5), (1 : 20), (4 : 5), (1 : 27), (1 : 36), (4 : 9) (1 : 48), (3 : 16), (1 : 64)
VIII	(1 : 14), (2 : 7), (1 : 30), (2 : 15), (3 : 10), (5 : 6), (1 : 40), (5 : 8) (1 : 54), (2 : 27), (1 : 72), (8 : 9), (1 : 96), (3 : 32), (1 : 128)
IX	(1 : 21), (3 : 7), (1 : 25), (1 : 28), (4 : 7), (1 : 45), (5 : 9), (1 : 60) (3 : 20), (4 : 15), (5 : 12), (1 : 80), (5 : 16), (1 : 81), (1 : 108) (4 : 27), (1 : 144), (9 : 16), (1 : 192), (3 : 64), (1 : 256)
X	(1 : 42), (3 : 14), (6 : 7), (1 : 50), (2 : 25), (1 : 56), (7 : 8), (1 : 90) (2 : 45), (5 : 18), (9 : 10), (1 : 120), (3 : 40), (5 : 24), (8 : 15) (1 : 160) (5 : 32), (1 : 162), (2 : 81), (1 : 216), (8 : 27), (1 : 288) (9 : 32), (1 : 384), (3 : 128), (1 : 512)

Leonhard Euler présente cette classification ainsi que toute l'étude sur les accords dans le quatrième chapitre de son *Tentamen*[2].

Discussion sur la différence entre consonances et dissonances

Une des questions que se pose Leonhard Euler est celle de la limite entre un accord consonant et un accord dissonant. En effet, selon sa théorie, une dissonance n'est rien d'autre qu'une consonance dont l'ordre est plus difficile à percevoir. Il se demande alors où est la limite entre ces deux types d'accords. Remarquant que le rapport $(8 : 9) \in VIII$ qui définit comme on le verra ultérieurement l'intervalle du ton majeur est considéré comme dissonant et que le rapport $(4 : 5) \in VII$ de la tierce majeure apparaît comme consonant, Euler conclut que la limite doit se trouver quelque part entre le septième et le huitième degré de douceur. Néanmoins, il n'est pas possible de conclure que les accords du septième degré sont consonants et que ceux du huitième sont dissonants car les rapports $(5 : 6)$ et $(5 : 8)$ (la tierce mineure et la sixte majeure respectivement) sont considérés comme des consonances, bien qu'ils appartiennent au huitième degré de douceur.

4.2 Les accords complets

Grâce à sa notion d'exposant, Euler définit ce qu'il nomme un accord complet. Un accord est dit *complet* si et seulement si les tons utilisés sont tous les diviseurs de l'exposant. Donnons quelques exemples pour illustrer ceci. Soit p, q et r des nombres premiers.

- L'accord complet d'exposant p est $(1 : p)$.
- L'accord complet d'exposant p^m est $(1 : p : p^2 : \cdots : p^m)$.
- L'accord complet d'exposant pq est $(1 : p : q : pq)$.
- L'accord complet d'exposant $p^m q^n$ est composé de $(m+1)(n+1)$ tons, et plus généralement, l'accord complet d'exposant $p^m q^n r^l$ est composé de $(m + 1)(n + 1)(l + 1)$ tons.

Nous remarquons alors qu'en enlevant des tons à ces accords complets, nous pouvons obtenir des accords incomplets qui sont équivalents au niveau de l'ordre perçu. En effet, il suffit pour cela que les tons enlevés ne changent pas l'exposant de l'accord pour que le degré de douceur soit le même. Ceci permet d'appliquer aux accords à plusieurs tons la théorie développée pour les accords à deux tons.

Exemple. Considérons l'accord complet $(1 : 2 : 3 : 6)$ d'exposant $\mathrm{ppmc}(1 : 2 : 3 : 6) = 6$. Nous pouvons enlever les tons 2 et 3 sans changer l'exposant. L'accord obtenu est $(1 : 6)$. l'accord $(1 : 2 : 3 : 6)$ appartient donc au quatrième degré de douceur.

[2] *Leonhard Euler's Tentamen novae theoriae musicae : a translation and commentary* [6], chapitre IV, pages 101 à 122.

Ainsi, tout accord complet est équivalent à un accord à deux tons de même exposant. Nous pouvons donc facilement classer les accords complets selon leurs degrés de douceur à l'aide du tableau de la section précédente.

Selon Leonhard Euler, les accords complets sont plus faciles à comprendre que les accords incomplets. Cependant dans la pratique, ils ne sont pas utilisés car, comportant un nombre important de tons, l'accord complet produit plus un bruit confus qu'une jolie harmonie. Euler explique que cela est dû au fait que les instruments ne sont pas parfaitement accordés.

4.3 Les successions d'accords

Intéressons-nous maintenant à la manière dont Euler traite les successions de plusieurs accords, étudiées dans le cinquième chapitre de son *Tentamen*[3]. Remarquant que deux accords agréables joués successivement peuvent paraître déplaisants, il étudie alors le degré de douceur d'une succession de deux accords. Son idée est la suivante : il faut considérer les deux accords comme s'ils étaient joués simultanément et calculer l'exposant de l'accord résultant. Ceci permet alors de trouver le degré de douceur de la succession. Cependant, pour trouver ce degré, il ne suffit pas de regarder l'exposant de l'accord, mais il faut aussi savoir à quelle hauteur il est joué.

Exemple. Considérons l'octave. Elle peut être représentée par le rapport $(1 : 2)$, mais aussi par $(2 : 4)$, $(3 : 6)$, ou plus généralement $(a, 2a)$. De même, la quinte peut être représentée par le rapport $(2 : 3)$ mais aussi d'une manière générale par $(2b : 3b)$. L'exposant de la succession sera alors $\mathrm{ppmc}(a, 2a, 2b, 3b)$ et non $\mathrm{ppmc}(1, 2, 3)$.

Euler définit alors l'*indice* qui permet de savoir le niveau auquel l'accord est joué. Un accord sera donc noté par $A(a)$, où A est son exposant et a son indice. Un accord pouvant être représenté par une infinité d'expressions, l'indice permet de savoir laquelle considérer.

Exemple. $6(2)$ définit l'accord $(2 : 4 : 6 : 12)$. En effet l'exposant 6 induit l'accord $(1 : 2 : 3 : 6)$. Mais chacun des composants de l'accord doit être doublé car l'indice est 2.

En d'autres termes, l'indice est le plus grand diviseur commun des tons de l'accord.

[3] *Leonhard Euler's Tentamen novae theoriae musicae : a translation and commentary* [6], chapitre V, pages 123 à 139.

Généralisation

Considérons les deux accords $A(a)$ et $B(b)$ tels que les diviseurs de A sont $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ et ceux de B sont $1, \eta, \theta, \iota, \chi, \cdots$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} A(a) &\to (a : \alpha a : \beta a : \gamma a : \delta a : \cdots) = Aa; \\ B(b) &\to (b : \eta b : \theta b : \iota b : \chi b : \cdots) = Bb. \end{aligned}$$

Par définition de l'exposant d'un accord, l'exposant de la succession sera donné par le plus petit multiple commun de $(Aa : Bb)$, en ayant pris soin auparavant de diviser les composants de cet accord par le plus grand diviseur commun de a et b.

Supposons à présent que a et b n'ont pas de diviseur en commun. Alors la relation suivante nous donne l'exposant recherché.

$$\mathrm{ppmc}(Aa, Bb) = \frac{ABab}{D},$$

où $D = \mathrm{pgdc}(Aa, Bb)$.

Si les degrés de douceur de A, B, a, b et D sont p, q, r, s et t respectivement, alors le degré de douceur de $\frac{ABab}{D}$ sera $p+q+r+s-t-2$. En effet, en reprenant les règles mises en évidence à la section 3.3, le degré de douceur de $ABab$ est $p+q+r+s-3$ et celui de $ABabD$ est $p+q+r+s+t-4$. Ainsi, le degré de $ABabD$ excède celui de $ABab$ de $t+1$. Donc le degré de $ABab$ doit excéder celui $\frac{ABab}{D}$ de $t+1$. Finalement, nous obtenons bien que

$$\deg\left(\frac{ABab}{D}\right) = p+q+r+s-t-2.$$

C'est le degré de douceur de la succession. Plus il est petit, plus la succession sera plaisante.

Exemple. Considérons la succession des deux accords suivants :

$$\begin{array}{lcl} 120(2) & \to & (2 : 4 : 6 : 8 : 10 : 12 : 16) \\ 60(3) & \to & (3 : 6 : 9 : 12 : 15) \end{array}$$

L'exposant 120 du premier accord appartient au dixième degré de douceur et celui du second accord, 60, appartient au neuvième degré de douceur. De plus les indices 2 et 3 appartiennent au deuxième et troisième degrés de douceur respectivement. Finalement, le plus grand diviseur commun de $240 = 120 \cdot 2$ et $180 = 60 \cdot 3$ est 60 qui appartient au neuvième degré de douceur. Nous avons donc :

$$\begin{array}{lllll} A = 120, & a = 2, & B = 60, & b = 3, & D = 60 \\ p = 10, & r = 2 & q = 9, & s = 3, & t = 9 \end{array}$$

Le degré de douceur de la succession est donc donné par

$$p+q+r+s-t-2 = 10+9+2+3-9-2 = 13.$$

Détermination de l'indice rendant la succession la plus agréable

Soit $M = \text{ppmc}(A, B)$, alors $M \leq \frac{ABab}{D}$. Euler pose alors :

- Si $\frac{ABab}{D} = M$, la succession est du premier ordre.
- Si $\frac{ABab}{D} = 2M$, la succession est du second ordre.
- Si $\frac{ABab}{D} = 3M, 4M$, la succession est du troisième ordre, car 3 et 4 appartiennent au troisième degré de douceur.
- Généralement, si $\frac{ABab}{D} = nM$, alors la succession est de l'ordre du degré de douceur de n.

Notons qu'il faut faire attention à ne pas confondre l'ordre d'une succession avec son degré de douceur.

Une succession $A(a)$, $B(b)$ sera donc de premier ordre si

$$ppmc(Aa, Bb) = ppmc(A, B).$$

Les conditions pour satisfaire cette relation sont les suivantes. Clairement, la succession sera de premier ordre si $a = b = 1$. Ce sera aussi le cas si b est tel que $Bb = A$ ou si Bb est composé uniquement de facteurs de A, et inversément, si a est tel que $Aa = B$ ou si Aa est composé uniquement de facteurs de B. Dans ce cas, on a bien $M = \text{ppmc}(Aa, Bb)$.

Nous aurons aussi une succession du premier ordre dans le cas suivant. Soit $A = dE$ et $B = dF$ avec E et F premiers entre eux. Alors si e et f sont des facteurs de E et F respectivement, la succession $A(f)$, $B(e)$ sera du premier ordre. En effet,

$$\text{ppmc}(Af, Be) = \text{ppmc}(dEf, dFe) = dEF = \text{ppmc}(A, B).$$

Euler généralise ensuite sa théorie en calculant l'exposant de séries de plusieurs accords. Il est ainsi même possible de trouver l'exposant d'une oeuvre musicale complète et de la classer selon son degré de douceur afin de savoir si elle apparaîtra comme agréable ou non.

5 La gamme diatonico-chromatique

Commençons par rappeler la méthode d'Euler permettant d'évaluer si un accord, une suite d'accords et même une oeuvre musicale complète sont plaisants pour l'oreille de l'auditeur. Le principe est toujours le même : calculer l'exposant pour en déduire le degré de douceur.

Les instruments de musique dits à tons fixes, tels que le piano ou la guitare, ne pouvant jouer qu'un nombre limité de notes, tout morceau de musique est joué dans une certaine gamme. Pour Euler, une gamme est une division particulière de l'octave. Comme le passage d'une octave à une autre est obtenu simplement par le doublement des nombres représentant les tons de la gamme, ces derniers définissent un exposant de la forme $2^m A$ où A est un produit de nombres premiers différents de 2. Le nombre de tons contenus dans une gamme est alors donné par le nombre de diviseurs de A. Ainsi, une gamme dont l'exposant est $2^m p^n$ contient $n+1$ tons et une gamme dont l'exposant est $2^m p^n q^l$ contient $(n+1)(l+1)$ tons.

Leonhard Euler, dans son *Tentamen*[4], présente un certain nombre de gammes dont l'exposant est de la forme $2^m \cdot 3^n \cdot 5^l$, en donnant à chaque fois les tons contenus dans l'octave. Dans ce chapitre, nous présentons la gamme dont l'exposant est $2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2$ car c'est la plus proche de la gamme utilisée encore aujourd'hui dans la musique. Cette gamme est appelée la gamme diatonico-chromatique. Nous allons maintenant voir comment construire les douze tons de cette gamme à partir des diviseurs de $3^3 \cdot 5^2$. Euler présente cette construction dans trois de ses *Lettres à une princesse d'Allemagne* [3], intitulées *De l'unisson et des octaves*, *Des autres consonances* et *Des douze tons du clavecin.*

5.1 Construction des douze tons de la gamme

Avant de voir comment Euler construit explicitement les douze tons de la gamme, nous donnons la notation utilisée pour représenter ces tons.

- les tons de la première octave sont notés par les lettres majuscules de C à B ;
- les tons de l'octave supérieure sont notés par les lettres minuscules de c à b ;
- les tons des octaves au-dessus sont notés par $\bar{c}$ à $\bar{b}$, $\bar{\bar{c}}$ à $\bar{\bar{b}}$ et ainsi de suite.

Euler commence avec le nombre 2, avec lequel nous obtenons les tons suivants :

$$\begin{array}{ccccc} F & f & \bar{f} & \bar{\bar{f}} & \bar{\bar{\bar{f}}} \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$$

[4] *Leonhard Euler's Tentamen novae theoriae musicae : a translation and commentary* [6], chapitres VIII et IX, pages 164 à 206.

Ceci nous donne uniquement les octaves. Pour les autres tons, il nous faut utiliser les diviseurs de $3^3 \cdot 5^2$. Pour commencer, Euler utilise le nombre 3. Le ton obtenu par ce nombre doit se trouver entre le ton f qui est associé au nombre 2 et le ton $\bar{f}$ associé au nombre 4. Ce ton est $\bar{c}$, qui est la quinte du ton f. Les nombres associés aux octaves de $\bar{c}$ sont obtenus par doublements. Nous avons ainsi les tons suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} F & f & \bar{c} & \bar{f} & \bar{\bar{c}} & \bar{\bar{f}} & \bar{\bar{\bar{c}}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 12 \end{array}$$

Utilisant à présent le nombre 3 élevé au carré, nous obtenons le ton $\bar{\bar{g}}$ qui est la quinte de $\bar{\bar{c}}$. En effet, nous pouvons remarquer ci-dessus que le rapport définissant la quinte est $(2 : 3)$. Le ton $\bar{\bar{c}}$ étant associé au nombre 6, 6 doit être les deux tiers du nombre associé à $\bar{\bar{g}}$. Ce nombre est donc $9 = 3^2$. Nous obtenons :

$$\begin{array}{cccccccc} F & f & \bar{c} & \bar{f} & \bar{\bar{c}} & \bar{\bar{f}} & \bar{\bar{g}} & \bar{\bar{\bar{c}}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 \end{array}$$

Repartant de C à la place de $\bar{\bar{\bar{c}}}$, ce qui est autorisé car les proportions restent les mêmes quelle que soit l'octave considérée, nous avons construit jusqu'ici les tons suivants :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C & F & G & C & f & g & \bar{c} & \bar{f} & \bar{g} & \bar{\bar{c}} & \bar{\bar{f}} & \bar{\bar{g}} & \bar{\bar{\bar{c}}} \\ 6 & 8 & 9 & 12 & 16 & 18 & 24 & 32 & 36 & 48 & 64 & 72 & 96 \end{array}$$

Leonhard Euler montre ensuite que le ton D est associé au nombre 27, qui n'est autre que le cube de 3. Il décrit deux façons de l'obtenir. La première méthode permet de l'obtenir à partir du ton $\bar{c}$. En effet, l'intervalle de $\bar{c}$ à $\bar{d}$ est une seconde, contenue dans le rapport $(8 : 9)$. Le ton $\bar{c}$ étant associé au nombre 24, le ton $\bar{d}$ sera associé au nombre $\frac{24}{8} \cdot 9 = 27$. La deuxième méthode est issue d'un raisonnement similaire, mais à partir du ton g. En effet, l'intervalle entre le ton g et le ton $\bar{d}$ étant une quinte (rapport $(2 : 3)$) et g étant associé au nombre 18, $\bar{d}$ sera associé au nombre $\frac{18}{2} \cdot 3 = 27$. Transposé à nouveau dans la première octave, nous obtenons :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C & D & F & G & c & d & f & g & \bar{c} & \bar{d} & \bar{f} & \bar{g} & \bar{\bar{c}} \\ 24 & 27 & 32 & 36 & 48 & 54 & 64 & 72 & 96 & 108 & 128 & 144 & 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \bar{\bar{d}} & \bar{\bar{f}} & \bar{\bar{g}} & \bar{\bar{\bar{c}}} \\ 216 & 256 & 288 & 384 \end{array}$$

Nous voyons apparaître l'intervalle de D à f, appelé tierce mineure, qui est contenu dans le rapport $(27 : 32)$, et l'intervalle de F à d, appelé sixte majeure, contenu dans le rapport $(32 : 54)$. Arrivé à ce stade, Euler dit qu'on pourrait encore tripler le 27 mais « la musique ne va pas aussi loin ». Les autres tons seront obtenus à partir du nombre 5.

A ce stade là, faisons un petit résumé de la situation. Jusqu'à maintenant, nous avons construit les tons suivants :

F	G	c	d	f
16	18	24	27	32

où les nombres qui y sont associés sont de la forme $2^m \cdot 3^n$, avec $n \leq 3$. Le nombre 5 définit le ton qui fait cinq battements pendant que le ton F en fait un. Il se trouve donc entre $\bar{f}$ et $\bar{\bar{c}}$ qui font respectivement 4 et 6 battements pendant que F n'en fait qu'un seul. Ce ton est le $\bar{a}$ qui est la tierce majeure de $\bar{f}$, contenue dans le rapport $(4:5)$. Nous avons donc :

F	f	$\bar{f}$	$\bar{a}$	$\bar{\bar{c}}$
1	2	4	5	6

Nous voyons apparaître l'intervalle de $\bar{a}$ à $\bar{\bar{c}}$ qui est à nouveau une tierce mineure, cette fois contenue dans le rapport $(5:6)$ alors que nous l'avions découverte précédemment dans le rapport $(27:32)$. Euler explique cette différence par le fait qu'elle est imperceptible pour l'oreille, car les deux rapports sont très proches.

D'une manière analogue, nous construisons les tons $\bar{b}$, $\bar{e}$ et $\bar{\bar{f}}\#$ qui sont les tierces majeures des tons G, c et d respectivement. En reprenant les nombres que nous avions obtenus, nous pouvons calculer les nombres associés aux tons $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{e}$ et $\bar{\bar{f}}\#$ grâce au rapport $(4:5)$ de la tierce majeure :

F	G	c	d	f	g	$\bar{c}$	$\bar{d}$	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$\bar{\mathbf{a}}$	$\bar{\mathbf{b}}$	$\bar{\bar{c}}$
16	18	24	27	32	36	48	54	64	72	**80**	**90**	96
								4·16	**4·18**	5·16	**5·18**	4·24

$\bar{\bar{d}}$	$\bar{\bar{\mathbf{e}}}$	$\bar{\bar{f}}$	$\bar{\bar{\mathbf{f}}}\#$	$\bar{\bar{g}}$	$\bar{\bar{a}}$	$\bar{\bar{b}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$	$\bar{\bar{\bar{d}}}$	$\bar{\bar{\bar{e}}}$	$\bar{\bar{\bar{f}}}$
108	**120**	128	**135**	144	160	180	192	216	240	256
4·27	5·24		**5·27**							

Transposant ces résultats dans la première octave, nous obtenons :

F	$F\#$	G	A	B	c	d	e	f
128	135	144	160	180	192	216	240	256

Si nous omettons le ton $F\#$, nous avons ainsi construit tous les tons correspondants aux touches principales d'un piano, c'est-à-dire aux touches blanches. Ces notes de musique constituent la gamme diatonique, dont l'exposant est $2^m \cdot 3^3 \cdot 5$.

En utilisant le nombre 5 élevé au carré, et en partant des quatre derniers tons obtenus (A, E, B et $F\#$), nous construisons les tierces majeures de ceux-ci, soit les tons $C\#$, $G\#$, $D\#$ et $A\#$ respectivement. Repartant du ton

F obtenu précédemment, nous calculons les nombres associés à ces tons à nouveau grâce au rapport (4 : 5) de la tierce majeure :

F	$F\#$	G	A	B	c	**c#**	d	**d#**	e	f	$f\#$
128	135	144	160	180	192	**200**	216	**225**	240	256	270
			4·40	**4·45**		5·40		**5·45**	4·60		

g	**g#**	a	b	$\bar{c}$	$\bar{c}\#$	$\bar{d}$	$\bar{d}\#$	$\bar{e}$	$\bar{f}$	$\bar{f}\#$	$\bar{g}$
288	**300**	320	360	384	400	432	450	480	512	540	576
	5·60									4·135	

$\bar{g}\#$	$\bar{a}$	**ā#**	$\bar{b}$	$\bar{\bar{c}}$
600	640	**675**	720	768
		5·135		

Nous avons ainsi construit les douze tons de la gamme diatonico-chromatique utilisés dans la musique à partir du nombre 2 répété autant de fois que nécessaire, du nombre 3 répété 3 fois au plus et du nombre 5 répété 2 fois au plus, c'est-à-dire à partir des diviseurs de l'exposant $2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2$ de cette gamme. Le tableau suivant récapitule tous les résultats obtenus.

C	$2^7 \cdot 3$	384	intervalle
$C\#$	$2^4 \cdot 5^2$	400	(24 : 25)
D	$2^4 \cdot 3^3$	432	(25 : 27)
$D\#$	$2 \cdot 3^3 \cdot 5$	450	(24 : 25)
E	$2^5 \cdot 3 \cdot 5$	480	(15 : 16)
F	2^4	512	(15 : 16)
$F\#$	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$	540	(128 : 135)
G	$2^6 \cdot 3^2$	576	(15 : 16)
$G\#$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	600	(24 : 25)
A	$2^7 \cdot 5$	640	(15 : 16)
$A\#$	$3^3 \cdot 5^2$	675	(128 : 135)
B	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	720	(15 : 16)
c	$2^8 \cdot 3$	768	(15 : 16)

La i^{e} ligne de la quatrième colonne du tableau précédent indique le rapport entre le nombre associé au son de la ligne i et celui associé au nombre de la ligne $i-1$. Nous remarquons que les intervalles entre les tons ne sont pas égaux mais Euler dit : « C'est aussi ce que la véritable harmonie exige ». Les intervalles (15 : 16), (24 : 25), (25 : 27) et (128 : 135) se nomment respectivement *demi-ton majeur*, *demi-ton mineur*, *limma majeur* et *limma mineur*. Néanmoins, les différences entre ces intervalles étant très petites, ils sont considérés comme égaux. Ce sont les demi-tons. L'octave est donc divisée en douze demi-tons. Les musiciens les font égaux car, même si cela altère la justesse des accords, cela avantage la transposition d'un ton à un autre. En effet, la mélodie restera ainsi inchangée quelle que soit la tonalité choisie.

5.2 Les intervalles de la gamme

La construction des douze tons de la gamme diatonico-chromatique vue à la section précédente, ainsi que l'étude des accords à deux sons présentée à la section 4.1 nous permettent de classer les différents intervalles de la gamme, bien connus des musiciens, selon leurs degrés de douceur :

nom de l'intervalle	rapport	degré de douceur
Octave	(1 : 2)	II
Quinte	(2 : 3)	IV
Quarte	(3 : 4)	V
Sixte majeure	(3 : 5)	VII
Tierce majeure	(4 : 5)	VII
Tierce mineure	(5 : 6)	VIII
Sixte mineure	(5 : 8)	VIII
Seconde majeure	(8 : 9)	VIII
Septième mineure	(5 : 9) ou (9 : 16)	IX
Seconde mineure	(9 : 10)	X
Septième majeure	(8 : 15)	X

Historiquement, les intervalles de la partie supérieure du tableau (jusqu'à la sixte mineure) sont considérés comme des consonances, tandis que ceux de la partie inférieure (depuis la seconde majeure) sont considérés comme des dissonances. Il peut donc paraître surprenant de voir un intervalle consonant, la sixte majeure, et un intervalle dissonant, la seconde majeure, appartenir au même degré de douceur. Cependant, il n'est pas facile de déterminer à l'oreille lequel de ces deux intervalles est le plus agréable. Il est donc assez intuitif de les voir appartenir au même degré.

6 Les autres gammes de la théorie d'Euler

Nous avons vu au chapitre précédent que pour Leonhard Euler, une gamme est une division particulière de l'octave, et qu'elle possède un exposant de la forme $2^m \cdot 3^n \cdot 5^l$. Nous avons également mis en évidence le fait que les tons qui constituent une gamme sont donnés par les diviseurs de l'exposant. Dans ce chapitre, nous présentons les différentes gammes que Leonhard Euler a étudiées dans son *Tentamen*[5].

La première gamme développée par Euler a pour exposant 2^m. Le seul ton de l'octave est donc associé au nombre 1, car le nombre suivant, le 2 représente déjà l'octave supérieure. L'exposant de la deuxième gamme est $2^m \cdot 3$. Dans cette gamme, les tons de l'octave sont associés aux nombres 2, 3 et 4. La troisième gamme a pour exposant $2^m \cdot 5$. Les tons de l'octave sont donc associés aux nombres 4, 5 et 8. Ainsi, si nous prenons le ton F et ses octaves comme tons associés aux puissances de 2, nous obtenons les tons suivants pour les trois premières gammes.

Gamme I : Exposant 2^m.

F	f
1	2

Gamme II : Exposant $2^m \cdot 3$.

F	c	f
2	3	4

Gamme III : Exposant $2^m \cdot 5$.

F	A	f
4	5	8

Leonhard Euler dit que ces trois gammes ne peuvent pas produire une jolie harmonie de par leur trop grande simplicité. Elles n'ont donc jamais été utilisées.

Les tons de l'octave de la quatrième gamme, d'exposant $2^m \cdot 3^2$, sont associés aux nombres 8, 9, 12 et 16. Cette gamme aurait été la première à être utilisée, en Grèce, sur un instrument à quatre cordes, où chacune des cordes produisait un des tons de la gamme.

Gamme IV : Exposant $2^m \cdot 3^2$

F	G	c	f
8	9	12	16

De plus, Euler remarque que cette gamme s'accorde particulièrement bien avec les principes de l'harmonie car elle contient uniquement les intervalles de quinte, quarte, seconde et octave. Si nous exceptons la seconde, ces intervalles sont les plus consonants selon son classement.

[5] *Leonhard Euler's Tentamen novae theoriae musicae : a translation and commentary* [6], chapitre VIII, pages 164 à 185.

Les cinq gammes que Leonhard Euler présentent ensuite n'ont jamais été utilisées dans la pratique, même si elles permettent une plus grande variété que la précédente. Ces gammes sont les suivantes :

Gamme V : Exposant $2^m \cdot 3 \cdot 5$.

F	A	c	e	f
8	10	12	15	16

Gamme VI : Exposant $2^m \cdot 5^2$.

F	A	$c\#$	f
16	20	25	32

Gamme VII : Exposant $2^m \cdot 3^3$.

F	G	c	d	f
16	18	24	27	32

Gamme VIII : Exposant $2^m \cdot 3^2 \cdot 5$.

F	G	A	B	c	e	f
32	36	40	45	48	60	64

Gamme IX : Exposant $2^m \cdot 3 \cdot 5^2$.

F	$G\#$	A	c	$c\#$	e	f
64	75	80	96	100	120	128

En ce qui concerne la sixième gamme, Leonhard Euler explique qu'elle n'a jamais été utilisée car elle ne permet que des intervalles de tierce majeure (les rapports entre les tons approchant ou égalant le rapport exact (4 : 5) de la tierce majeure), or cet intervalle a longtemps été considéré comme dissonant.

En ce qui concerne la dixième et la onzième gamme, dont les exposants sont respectivement $2^m \cdot 5^3$ et $2^m \cdot 3^4$, Leonhard Euler affirme qu'elles pourraient être parfaitement adaptées à la pratique mais qu'elles ne sont pas en usage car elles contiennent des tons qui n'appartiennent pas à la gamme diatonico-chromatique. Or c'est cette gamme qui est utilisée lors de la fabrication des instruments à tons fixes. Ces deux gammes sont détaillées ci-dessous. Les tons n'appartenant pas à la gamme diatonico-chromatique sont notés avec un astérisque.

Gamme X : Exposant $2^m \cdot 5^3$.

F	A	$c\#$	f^*	f
64	80	100	125	128

Gamme XI : Exposant $2^m \cdot 3^4$.

F	G	A^*	c	d
64	72	81	96	108

La douzième gamme a pour exposant $2^m \cdot 3^3 \cdot 5$. Cette gamme, si nous omettons le ton $F\#$ qui est associé au nombre 135, contient tous les tons de la gamme diatonique. Nous l'avons déjà rencontrée au chapitre précédent lorsque nous avons construit les douze tons de la gamme diatonico-chromatique.

Gamme XII : Exposant $2^m \cdot 3^3 \cdot 5$.

F	$F\#$	G	A	B	c	d	e	f
128	135	144	160	180	192	216	240	256

Les deux gammes suivantes sont proches de deux gammes utilisées dans la musique grecque ancienne. La treizième se rapproche de la gamme appelée chromatique, tandis que la quatorzième se rapproche de la gamme appelée enharmonique. Euler les nomme *gamme chromatique corrigée* et *gamme enharmonique corrigée*. Ces deux gammes sont les suivantes :

Gamme XIII : Exposant $2^m \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

F	G	$G\#$	A	B	c	$c\#$	$d\#$	e	f
128	144	150	160	180	192	200	225	240	256

Gamme XIV : Exposant $2^m \cdot 3 \cdot 5^3$.

F	$G\#$	A	B^*	c	$c\#$	e	$f\#$	f
256	300	320	375	384	400	480	500	512

Les quinzième et seizième gammes, qui ont pour exposant $2^m \cdot 5^4$ et $2^m \cdot 3^5$ respectivement, n'ont jamais été utilisées. Selon Euler, cela est dû au fait que, dans la quinzième gamme, il manque les agréables consonances provenant du nombre 3 telles que la quinte ou la quarte, et dans la seizième, il manque les consonances provenant du nombre 5, ce qui implique que cette gamme ne permet pas d'obtenir une musique suffisamment variée.

Gamme XV : Exposant $2^m \cdot 5^4$.

F	A^*	A	$c\#$	f^*	f
512	625	640	800	1000	1024

Gamme XVI : Exposant $2^m \cdot 3^5$.

F	G	A^*	c	d	e^*	f
128	144	162	192	216	243	256

La dernière gamme que Leonhard Euler étudie a pour exposant $2^m \cdot 3^4 \cdot 5$, qui encore une fois, n'est pas utilisée dans la musique. L'inconvénient que Leonhard Euler trouve à cette gamme est qu'elle contient l'intervalle appelé *comma*, contenu dans le rapport (80 : 81). Or la différence entre deux tons espacés d'un comma est très difficilement perceptible. Dans cette gamme, cet intervalle se trouve entre les tons A et A^*.

Gamme XVII : Exposant $2^m \cdot 3^4 \cdot 5$.

F	$F\#$	G	A	A^*	B	c	$c\#$	d	e	f
256	270	288	320	324	360	384	405	432	480	512

7 Les nouvelles consonances de la musique moderne

Intéressons-nous à présent aux deux articles que Leonhard Euler a écrit bien après son *tentamen*, intitulés *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* [4] et *Du véritable caractère de la musique moderne* [5]. Remarquant que certains accords, dont l'exposant calculé selon ses principes de l'harmonie est très compliqué, sont néanmoins fréquemment utilisés dans la musique, Leonhard Euler apporte un complément à sa théorie de la musique qui permet d'expliquer pourquoi ces accords, qui devraient être extrêmement dissonants et par conséquent fort désagréables, apparaissent au contraire comme très plaisants. Il relève également que ces accords apportent à la musique une force nouvelle qui la rend plus attractive.

7.1 L'utilisation du nombre 7

Nous avons vu précédemment que dans son *Tentamen*, Leonhard Euler s'était restreint aux gammes dont l'exposant est de la forme $2^m \cdot 3^n \cdot 5^l$. La raison de cette restriction est la suivante. La musique qualifiée d'ancienne par Euler se base sur trois accords fondamentaux : l'octave, la quinte et la tierce majeure. Les rapports de ces accords étant $(1 : 2)$, $(2 : 3)$ et $(4 : 5)$ respectivement, tous les nombres aptes à représenter des sons admettent une décomposition en facteurs premiers où n'apparaissent que les nombres 2, 3 et 5. Euler va pour la première fois utiliser le nombre 7 pour représenter des sons, car cela permet d'expliquer pourquoi certains accords considérés comme dissonants sont utilisés avec bonheur dans la musique dite moderne.

Considérons l'accord de septième représenté par des nombres :

$$\begin{array}{cccc} G & B & d & f \\ 36 & 45 & 54 & 64 \end{array}$$

Rappelons que l'exposant d'un accord est donné par le plus petit multiple commun des nombres associés aux tons qui le composent. Ici l'exposant est $8640 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Si nous partons de l'hypothèse que l'oreille parvient à percevoir l'ordre dans cet accord, alors l'accord suivant devrait sembler tout autant agréable car les tons ajoutés sont tous associés à des nombres qui sont des diviseurs de l'exposant 8640.

$$\begin{array}{ccccccc} G & A & B & c & d & e & f \\ 36 & 40 & 45 & 48 & 54 & 60 & 64 \end{array}$$

Or cet accord est extrêmement déplaisant. Il faut donc trouver une autre explication.

Euler remarque encore que dans l'accord formé des tons G, B, d et f, c'est le ton f qui trouble l'harmonie. En effet, si nous omettons ce son, l'accord résultant, formé des tons G, B et d, sera contenu dans le rapport $(36 : 45 : 54)$ que nous pouvons réécrire $(4 : 5 : 6)$. L'exposant de cette accord est 60.

L'explication avancée par Leonhard Euler se base sur le fait que l'oreille ne distingue pas un accord parfaitement juste, d'un accord qui s'éloigne légèrement de la juste proportion des sons. En effet, nous avons vu que sur les instruments à tons fixes tels que le piano ou la guitare, l'octave est divisée en douze parties égales. Ceci implique qu'aucun des intervalles n'est parfaitement juste excepté l'octave. Cependant, une musique jouée par ce type d'instruments est tout à fait plaisante. L'oreille n'est donc pas affectée par des petites imprécisions dans les proportions. Par exemple, si nous entendons les accords $(200 : 301)$ ou $(200 : 299)$, nous percevrons le rapport $(2 : 3)$ de la quinte. Ainsi, l'accord perçu par notre oreille sera contenu dans un rapport plus simple que l'accord réel.

Fort de cette hypothèse, et du fait que le ton qui trouble l'harmonie dans l'accord de septième $(36 : 45 : 54 : 64)$ est le f, Leonhard Euler explique que lorsque notre oreille entend cet accord, elle remplace le nombre 64 du ton f par un ton légèrement plus grave associé au nombre 63. Ainsi, l'accord perçu sera $(36 : 45 : 54 : 63)$ que nous pouvons récrire $(4 : 5 : 6 : 7)$. L'exposant de cet accord est alors 420.

L'étude de différents accords de ce type justifie alors l'utilisation du nombre 7 pour expliquer leurs succès dans la musique moderne. Ces accords ne sont alors pas des dissonances mais simplement des nouvelles consonances. Selon Leonhard Euler, le nombre 7 amène la musique à un plus haut degré de perfection. Mais il dit aussi qu'il faut des oreilles plus habiles pour bien percevoir ces nouvelles consonances. Certaines personnes n'apprécient donc pas l'utilisation de ces accords car, n'arrivant pas à percevoir l'ordre, ils apparaissent comme étant des dissonances et non des consonances.

7.2 Les douze tons étrangers

Nous avons vu à la section précédente que les nouvelles consonances résultent de l'utilisation du nombre 7. Ainsi, partant du ton C que nous associons au nombre 4, le ton associé au nombre 7 sera un peu plus aigu que le ton A qui est la sixte majeure de C, et un peu plus grave que le ton $A\#$, qui est la septième mineure de C. En effet, l'intervalle $(4 : 7)$ est un peu plus grand que l'intervalle $(3 : 5)$ de la sixte majeure et un peu plus petit que l'intervalle $(9 : 16)$ de la septième mineure. Nous avons ainsi obtenu un nouveau ton en utilisant le nombre 7, il sera noté à l'aide d'un astérisque. Ici nous avons obtenu le ton $A\#^*$.

Leonhard Euler nomme ces nouveaux tons les *tons étrangers* car il ne font pas partie des tons que nous trouvons sur les instruments à tons fixes. Pour jouer les oeuvres musicales qui en contiennent, les musiciens utilisent donc les tons qui s'en rapprochent le plus. Par exemple, pour jouer l'accord composé des tons C, E, G, $A\#^*$, contenus dans le rapport $(4:5:6:7)$, il faudra jouer soit le ton A, soit le ton $A\#$.

Le tableau suivant donne les 24 tons de la nouvelle gamme, dont l'exposant est $2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Nous retrouvons les douze tons de la gamme diatonico-chromatique construits à la section 5.1 ainsi que douze nouveaux tons, qui sont les tons étrangers.

Tons principaux	Nombres associés		Tons étrangers	Nombres associés	
F	2^{12}	$= 4096$	F^*	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$	$= 4032$
$F\#$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$	$= 4320$	$F\#^*$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$	$= 4200$
G	$2^9 \cdot 3^2$	$= 4608$	G^*	$2^7 \cdot 5 \cdot 7$	$= 4480$
$G\#$	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	$= 4800$	$G\#^*$	$3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$	$= 4725$
A	$2^{10} \cdot 5$	$= 5120$	A^*	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$= 5040$
$A\#$	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	$= 5400$	$A\#^*$	$2^8 \cdot 3 \cdot 7$	$= 5376$
B	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$	$= 5760$	B^*	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	$= 5600$
C	$2^{11} \cdot 3$	$= 6144$	C^*	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	$= 6048$
$C\#$	$2^8 \cdot 5^2$	$= 6400$	$C\#^*$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$	$= 6300$
D	$2^8 \cdot 3^3$	$= 6912$	D^*	$2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	$= 6720$
$D\#$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	$= 7200$	$D\#^*$	$2^{10} \cdot 7$	$= 7168$
E	$2^9 \cdot 3 \cdot 5$	$= 7680$	E^*	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	$= 7560$
f	2^{13}	$= 8192$	f^*	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$	$= 8064$

Pour construire les tons étrangers, il suffit d'en obtenir un, comme par exemple le ton $A\#^*$ à partir de C dans le rapport $(4:7)$. Ensuite, par la même méthode employée à la section 5.1, nous pouvons construire tous les autres grâce aux rapports $(2:3)$ et $(4:5)$ de la quinte et de la tierce majeure.

Ces nouvelles consonances construites sur le nombre 7 seraient encore plus agréables à écouter si on pouvait les jouer parfaitement et non pas avec les tons de la gamme diatonico-chromatique qui s'y rapprochent le plus. Leonhard Euler affirme que la musique serait portée à un plus haut degré de perfection si on pouvait doubler le nombre de tons d'un clavecin.

8 Quelques autres théoriciens de la musique

Aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, de nombreux savants se sont intéressés à la musique. Nous pouvons par exemple citer Galilée, Descartes ou encore Leibniz. Parmi eux, le mathématicien et philosophe français Marin Mersenne (1588-1648) a publié une théorie complète de la musique dans un ouvrage intitulé l'*Harmonie universelle*. Il a en particulier présenté un classement des intervalles de la gamme diatonico-chromatique du plus consonant au plus dissonant. Au XVIII^{e} siècle, c'est au tour de d'Alembert (1717-1783) de présenter une théorie de la musique à le demande du musicien Jean-Philippe Rameau (1683-1764).

8.1 Classement des intervalles chez Mersenne

Dans son article intitulé *Cordes vibrantes et consonances chez Beeckman, Mersenne et Galilée* [7], Patrice Baihlache présente deux classements des intervalles de la musique que Mersenne avait proposés dans son *Harmonie universelle*. Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement à un des deux classements, qui est exactement identique à celui que Leonhard Euler établira un siècle plus tard.

Octave (1 : 2)
Quinte (2 : 3)
Quarte (3 : 4)
Sixte majeure (3 : 5)
Tierce majeure (4 : 5)
Tierce mineure (5 : 6)
Sixte mineure (5 : 8)

Regardons à présent comment Mersenne établit ce classement. En ce qui concerne la perception du son, il se base sur la même théorie que Leonhard Euler, c'est-à-dire celle des battements que nous avons présentée à la section 3.1. Remarquant que le premier battement d'un ton a lieu en même temps que le second battement de l'octave, qu'il a également lieu en même temps que le troisième battement de la quinte, et ainsi de suite, il conclut que, plus le nombre associé au ton le plus aigu de l'intervalle est petit, plus l'intervalle est consonant. Il est aisé de voir que le ton le plus aigu de l'octave est associé au nombre 2, celui de la quinte au nombre 3, celui de la quarte au nombre 4 et ainsi de suite.

Mersenne se demande également pourquoi la musique s'arrête au nombre 7. Pour lui, ce nombre peut être accepté dans la musique pour diverses raisons, mais principalement par le fait que l'exercice permet de rendre facile une tâche qui semblait difficile au départ. Ainsi, un intervalle contenant le nombre 7 deviendrait agréable si on l'écoutait fréquemment.

8.2 La théorie de la musique par d'Alembert

Dans un autre article, intitulé *Sciences et musique : quelques grandes étapes en théorie musicale* [8], Patrice Bailhache présente, à la suite de la théorie de Leonhard Euler, une autre théorie de la musique que d'Alembert expose dans son ouvrage *Eléments de musique théorique et pratique suivant les principes de M. Rameau.*

Sa théorie est complétement différente de celle de Leonhard Euler, que d'Alembert trouve mauvaise. Il va même plus loin en rejetant toutes les théories de la musique connues jusqu'alors, car elles ne font pas suffisamment appel à l'expérience. Pour lui, la musique ne peut pas être mesurée car il s'agit avant tout de sensations subjectives. Il rejette même la théorie des battements pour la perception du son.

Sa théorie se base sur deux expériences. La première est la suivante : lorsqu'un son se fait entendre, nous percevons également l'octave de ce son ainsi que deux autres sons très aigus, la quinte de l'octave et la tierce majeure de la double octave. La deuxième est simplement la ressemblance entre un ton et son octave supérieure ou inférieure.

De ces deux expériences, d'Alembert déduit des justifications de la consonance des accords majeurs et mineurs. Par exemple, l'accord majeur, formé d'un ton, de sa tierce majeure et de sa quinte, est aisément justifié par le fait que dans tout son musical, il y résonne déjà la quinte et la tierce. De ces deux types d'accords et avec l'aide de la première expérience, il peut ainsi déduire tous les tons de la gamme diatonique, c'est-à-dire les tons C, D, E, F, G, A, B. D'Alembert déduit encore beaucoup d'autres éléments musicaux, mais nous n'entrerons pas dans les détails de cette théorie dans ce travail.

Selon Patrice Baihlache, cette théorie a fait progresser notre compréhension des phénomènes musicaux, contrairement à celle de Leonhard Euler. En effet, dans son article, il dit : « Globalement, il faut bien convenir que d'Alembert, à la même époque, est du bon côté de l'histoire, alors que son confrère suisse regarde vers le passé. »

Conclusion

Leonhard Euler avait pour but de donner une explication au plaisir qu'apporte la musique à celui qui l'écoute. Nous avons pu voir que, selon lui, ce plaisir vient de l'ordre perçu dans la musique. Sa méthode est toujours la même. Pour savoir si un accord isolé, une suite d'accords ou une oeuvre musicale complète est agréable, il faut calculer l'exposant, c'est-à-dire le plus petit multiple commun des nombres associés aux tons, et regarder à quel degré de douceur cet exposant appartient.

Nous avons également vu comment Euler calcule les nombres associés aux tons d'une gamme à partir des diviseurs de son exposant. Finalement, nous avons vu comment il introduit le nombre 7 pour expliquer la présence de certains accords particuliers en usage dans la musique dite moderne alors qu'il s'était restreint auparavant aux gammes dont l'exposant est de la forme $2^m \cdot 3^n \cdot 5^l$.

Cette théorie mathématique de la musique décrit particulièrement bien ce qui se passe dans la pratique et a donné aux musiciens une meilleure compréhension de leur art. Nous émettons néanmoins une petite réserve. Sa théorie reste complètement valable pour un morceau de musique joué à l'envers, c'est-à-dire en commençant par la fin. Ainsi, une oeuvre musicale devrait être tout autant plaisante à écouter lorsqu'elle est jouée à l'envers que lorsqu'elle est jouée normalement, du début à la fin. Ce qui est loin d'être le cas dans la pratique.

Références

[1] Myriam Fisher. *Leonhard Euler et la musique.* L'Ouvert 112, APMEP et IREM de Strasbourg, 2005.

[2] Sous la direction d'Hervé Lehning. *Leonhard Euler : Un génie des Lumières.* Éditions POLE - Paris, 2007.

[3] Leonhard Euler. *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de la physique et de la philosophie.* Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003.

[4] Leonhard Euler. *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique. Oeuvres complètes*, Ser. Tertia, volume I, 1764.

[5] Leonhard Euler. *Du véritable caractère de la musique moderne. Oeuvres complètes*, Ser. Tertia, volume I, 1764.

[6] Charles Samuel Smith. *Leonhard Euler's Tentamen novae theoriae musicae : a translation and commentary.* Bloomington - Ind., 1960.

[7] Patrice Bailhache. *Cordes vibrantes et consonances chez Beeckman, Mersenne et Galilée.* Sciences et techniques en perpectives, « Musique et mathématiques », 23, 1993.

[8] Patrice Bailhache. *Sciences et musique : quelques grandes étapes en théorie musicale.* Littérature, médecine, société, 13, Université de Nantes, 1996.