Corrigé de la série 5

Exercice 1 (Suites exactes).

a) Dire que cette suite est exacte c'est dire que $\ker(\varphi)$ est égal à l'image de $0 \to A$. Ainsi la suite est exacte si et seulement si $\ker(\varphi) = 0$ ce qui est équivalent à l'injectivité de φ.

b) Dire que cette suite est exacte c'est dire que $\mathrm{im}(\varphi)$ est égal au noyau de $B \to 0$. Or ce noyau est égal à B. Donc la suite est exacte si et seulement si $\mathrm{im}(\varphi) = B$.

c) On sait que ψ est surjective et donc le 1er théorème d'isomorphisme montre que $B/\ker(\psi) \cong C$. L'exactitude du milieu dit que $\ker(\psi) = \mathrm{im}(\varphi) = \varphi(A)$. L'assertion en découle.

d) L'homomorphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est donné en disant que la classe de $1 \mod 2$ est envoyée sur la classe de $2 \mod 4$. On vérifie aussitôt que c'est un homomorphisme injectif. L'homomorphisme $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est défini en disant que $\bar{a}$ est envoyé sur 0 ou sur 1 suivant que a est pair ou non. L'exactitude de la suite ainsi obtenue est alors immédiate.
Pour A il suffit de prendre le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et la suite exacte voulue s'obtient en prenant l'injection dans le premier facteur suivie de la projection sur le deuxième.

e) La suite exacte s'obtient comme suit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0 \\ & \bar{a} & \mapsto & (2\bar{a}, \bar{a}) & & \\ & & & (\bar{a}, \bar{b}) & \mapsto & \bar{a} - 2\bar{b} \end{array}$$

f) La suite exacte $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ est non scindée (on le voit à la main ou alors on utilise l'exercice g) ci-dessous) tandis que la suite $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ est scindée (on prend pour section l'injection dans le 2ème facteur).

g) On montre que $B = \ker(\psi) \oplus \mathrm{im}(\sigma)$. Tout d'abord on a que $\ker(\psi) \cap \mathrm{im}(\sigma) = 0$ en effet si $b \in \ker(\psi) \cap \mathrm{im}(\sigma)$ il existe $c \in C$ tel que $\sigma(c) = b$. Or $0 = \psi(b) = \psi(\sigma(c)) = c$ et donc $b = \sigma(c) = 0$. On montre à présent que tout élément b de B peut s'écrire comme $b = b' + b''$ où $b' \in \ker(\psi)$ et $b'' \in \mathrm{im}(\sigma)$. En effet, pour tout $b \in B$ on a

$$b = b - \sigma(\psi(b)) + \sigma(\psi(b))$$

et on vérifie sans peine que $b' = b - \sigma(\psi(b)) \in \ker(\psi)$. On a donc prouvé que $B = \ker(\psi) \oplus \mathrm{im}(\sigma)$. Or la suite étant exacte on a que $\ker(\psi) = \mathrm{im}(\varphi) = \varphi(A) \cong A$ et $\mathrm{im}(\sigma) = \sigma(C) \cong C$. Ceci montre bien que $B \cong A \oplus C$.

h) On construit une section comme suit : pour tout $i = 1, \ldots, n$ on chosit $b_i \in B$ tel que

$$\psi(b_i) = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

(un tel b_i existe car ψ est surjective). On pose alors $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$. Il est alors immédiat que σ vérifie $\psi \circ \sigma = \mathrm{id}_C$.

Exercice 2.

a) Soit $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ (où le 1 est en $i^{\text{ème}}$ position) alors $\mathbb{Z}^n = < e_1, \ldots, e_n >$ (c'est-à-dire, $\mathbb{Z}^n$ est lui-même de type fini). Supposons qu'il existe une surjection $\varphi : \mathbb{Z}^n \to G$ alors $G = \operatorname{im}(\varphi) = < \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) >$ est de type fini. Réciproquement, si $G = < g_1, \ldots, g_n >$ alors

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & G \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^n n_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n n_i g_i \end{array}$$

est un homomorphisme surjectif.

b) Procédons par récurrence sur n : si $n = 1$ alors on sait que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $d\mathbb{Z}$ pour un $d \in \mathbb{Z}$ et $d\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ ce qui prouve le résultat. Supposons maintenant que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^k$ avec $k \leq n-1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$ avec $m \leq k$ et montrons le résultat pour n. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, on considère

$$\begin{array}{cccc} p : & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^n n_i e_i & \longmapsto & n_1 e_1 \end{array}$$

la projection sur le premier facteur. Alors $\ker p \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ et $\ker(p|_H) = (\ker p) \cap H$ est un sous-groupe de $\ker p$. Par hypothèse de récurrence, $\ker(p|_H) \cong \mathbb{Z}^m$ avec $m \leq n-1$. De la même manière on voit que $\operatorname{im}(p|_H) \cong \mathbb{Z}$ (car c'est un sous groupe de $\mathbb{Z}$). La suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \ker(p|_H) \longrightarrow H \xrightarrow{p|_H} \operatorname{im}(p|_H) \longrightarrow 0$$

est alors scindée (car $\operatorname{im}(p|_H) \cong \mathbb{Z}$) et donc $H \cong \ker(p|_H) \oplus \operatorname{im}(p|_H) \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{m+1}$ avec $m + 1 \leq n$ ce qui termine la preuve.

c) Soit H un sous-groupe de G où G est de type fini. Par a) il existe une surjection $\varphi : \mathbb{Z}^n \to G$. Alors $\varphi^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, donc $\varphi^{-1}(H) \cong \mathbb{Z}^m$. Cela nous permet de construire l'homomorphisme surjectif $\mathbb{Z}^m \xrightarrow{\cong} \varphi^{-1}(H) \xrightarrow{\varphi} H$ qui prouve (toujours par a)) que H est de type fini.

d) Par ce qui précède, $T(G)$ est de type fini donc $T(G) = < g_1, \ldots, g_r >$. Ainsi, si $g \in T(G)$ on a que $g = \displaystyle\sum_{i=1}^r n_i g_i$. Mais comme $g_i \in T(G)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $n g_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Ainsi il n'y a alors, au maximum, que $(2n+1)^r$ possibilités pour g donc $\sharp(T(G)) \leq (2n+1)^r$.

e) Remarque : dans l'énoncé il manque l'hypothèse G est de type fini (sans laquelle les contre-exemples sont nombreux).

Il faut d'abord montrer le résultat suivant qui s'avérera crucial dans la suite de l'exercice :

Lemme :
Soit G un groupe abélien et $g_1, \ldots, g_n \in G$. Prenons $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}$ avec pgcd$(s_1, \ldots, s_n) = 1$ et posons $h_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n s_i g_i$. Alors il existe $h_2, \ldots, h_n \in G$ tels que $<g_1, \ldots, g_n> = <h_1, \ldots, h_n>$.

On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$ le résultat est clair. Si $n = 2$ par Bézout il existe $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a_1 s_1 + a_2 s_2 = 1$. On pose $h_2 = -a_2 g_1 + a_1 g_2$ et on veut montrer que $< g_1, g_2 > = < h_1, h_2 >$ (où $h_1 = s_1 g_1 + s_2 g_2$). Il est clair que $h_1, h_2 \in < g_1, g_2 >$

et donc $< h_1, h_2 > \subseteq < g_1, g_2 >$, de plus on a $a_1h_1 - n_2h_2 = g_1$ et $a_2h_1 + n_1h_2 = g_2$ donc $<g_1, g_2> \subseteq <h_1, h_2>$. Ceci prouve l'égalité.

Supposons le résultat vrai pour $n-1$ et montrons le pour n. Posons $d = \mathrm{pgcd}(s_1, \dots, s_{n-1})$ et $ds'_i = s_i$, alors $\mathrm{pgcd}(s'_1, \dots, s'_{n-1}) = 1$ et, par hypothèse de récurrence, il existe $h_2, \dots, h_{n-1} \in G$ tels que $<g_1, \dots, g_{n-1}> = <h'_1, h_2 \dots, h_{n-1}>$ (où $h'_1 = \sum_{i=1}^{n-1} s'_i g_i$). Soit $h_1 = dh'_1 + s_n g_n = \sum_{i=1}^{n} s_i g_i$ comme $\mathrm{pgcd}(d, s_n) = 1$, par le cas $n = 2$, il existe $h_n \in G$ tel que $<h'_1, g_n> = <h_1, h_n>$. Ainsi $<h_1, \dots, h_n> = <h'_1, \dots, h_{n-1}, g_n> = <g_1, \dots, g_n>$, ce qui termine la preuve.

À la lumière de ce résultat, l'exercice se résout de la manière suivante :

Soit $G = < g_1, \dots, g_n >$, où $\{g_1, \dots, g_n\}$ est un système de générateurs minimal (c'est-à-dire, si $G = < g'_1, \dots, g'_m >$ alors $m \geq n$). Soit $g = \sum_{i=1}^{n} s_i g_i \in G$, il faut d'abord montrer que $g = 0$ implique $s_1 = \dots = s_n = 0$. On procède par l'absurde : supposons qu'il existe un $s_j \neq 0$. Posons $d = \mathrm{pgcd}(s_1, \dots, s_n)$ et $ds'_i = s_i$, alors $g = d\sum_{i=1}^{n} s'_i g_i = 0$. Or G est sans torsion, donc $g' = \sum_{i=1}^{n} s'_i g_i = 0$. Comme $\mathrm{pgcd}(s'_1, \dots, s'_n) = 1$ on peut appliquer le lemme montré en début d'exercice et affirmer qu'il existe $h_2, \dots, h_n \in G$ avec

$$G = <g_1, \dots, g_n> = <g', h_2 \dots, h_n> = <h_2 \dots, h_n> .$$

Mais ceci est impossible puisqu'on a supposé n minimal. Ainsi, si $g = \sum_{i=1}^{n} s_i g_i = 0$ on en désuit que $s_1 = \dots = s_n = 0$. Il reste à voir que ce fait nous permet de construire un isomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ vers G. Comme G est de type fini, il existe un homomorphisme surjectif $\varphi : \mathbb{Z}^n \to G$ (voir a)), de plus $\ker \varphi = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i g_i = 0\big\} = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 = \dots = x_n = 0\big\} = 0$, donc φ est un isomorphisme.

f) L'application $T(G) \to G$ est l'inclusion et $G \to G/T(G)$ est l'homomorphisme surjectif de passage au quotient, ce qui nous permet de vérifier facilement que la suite est exacte. Montrons que $T(G/T(G)) = 0$: soit $\overline{g} \in T(G/T(G))$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\overline{g} = 0$ donc $ng \in T(G)$ donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $mng = 0$, c'est-à-dire $g \in T(G)$ donc $\overline{g} = 0$ et ainsi $T(G/T(G)) = 0$. Par e), $G/T(G) \cong \mathbb{Z}^n$ donc la suite est scindée (grâce au point h) de l'exercice 1).

g) Par le point f), on a que si G est de type fini

$$G \cong G/T(G) \oplus T(G) \cong \mathbb{Z}^n \oplus T(G),$$

de plus $T(G)$ est fini (par d)) donc $G \cong \mathbb{Z}^n \times \prod_{i=1}^{s} C_{{p_i}^{k_i}}$ où les p_i sont des premiers pas nécessairement distincts et les k_i sont des entiers positifs.

Exercice 3. On a $D_6 = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho, \rho^2\}$ où les σ_i sont les trois symétries et ρ la rotation d'angle $\pi/3$. La classe de conjugaison d'un élément est l'orbite de cet élément sous l'action du groupe sur lui-même par conjugaison. Ici, $O_{\sigma_1} = \{g\sigma_1 g^{-1} \mid g \in D_6\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. On calcul de même $O_\rho = \{\rho, \rho^2\}$ et $O_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$, ainsi $D_6 = O_{\mathrm{id}} \sqcup O_{\sigma_1} \sqcup O_\rho$.

Exercice 4.

a) L'orbite d'un point $x \in S^2$ est clairement l'ensemble $\{-x, x\}$. Si deux points x et y ne sont pas égaux ou antipodaux on a que leurs orbites sont distinctes. On peut donc partager la sphère en prenant une orbite pour chaque point de l'hémisphère nord $S^2_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 > 0\}$, une orbite pour chaque point sur le demi-équateur $S^1_+ = \{(x_1, x_2, 0) \in S^2 \mid x_2 > 0\}$ et l'orbite du point $(1, 0, 0)$. L'espace quotient de S^2 par cette action s'appelle *l'espace projectif* ou *la bouteille de Klein*.

b) Si $x \in \mathbb{R}^2$ son orbite est l'ensemble des points à distance $\|x\|$ de l'origine. Chaque orbite est donc un cercle, l'orbite de $(0, 0)$ étant le cercle de rayon 0. Deux points sont dans la même orbite si et seulement s'ils sont à même distance de l'origine. On peut prendre un représentant pour chaque point sur l'axe des x positifs ou nuls. L'espace quotient de $\mathbb{R}^2$ par $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ s'identifie à la demi-droite $\{(x, 0) \mid x \geq 0\}$.