L'exercice 3 est à rendre le 23 janvier au début de la séance d'exercices.

1. Effectuer les multiplications suivantes.
   (a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. On considère l'application $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^2$ définie par $(p(-1), (Dp)(1))$ (voir l'exercice 1(c), série 10).
   (a) Montrer que T est linéaire.
   (b) Soit $B = (1, x, x^2, x^3)$ et $B' = ((1, 0), (0, 1))$. Trouver $[T]_{B',B}$. En déduire la matrice colonne de $T(4 - 3x + x^2 - x^3)$ par rapport à B'.
   (c) Soit $C = (1, (1 - x), (1 - x)^2, (1 - x)^3)$ et $C' = ((1, 0), (-2, 1))$. Trouver $[T]_{C',C}$. En déduire la matrice colonne de $T(4 - 3x + x^2 - x^3)$ par rapport à C'.
3. Soient B la base canonique de $\mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{F})$,
$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right),$$
   B' la base canonique de $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, et $C' = (1 + x + x^2, x + x^2, 1 + x^2)$. Soit $T : \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{F}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ l'application linéaire définie par
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (4a + 2b) + (b - c)x + (3c + d)x^2.$$
   (a) Vérifier que C est une base de $\mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{F})$ et que C' est une base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$.
   (b) Déterminer $[\mathrm{Id}]_{C,B}$, $[\mathrm{Id}]_{C',B'}$, $[T]_{B',B}$ et $[T]_{C',C}$.
   (c) Déterminer $[T]_{C',B}$ et vérifier que $[T]_{C',B} = [T]_{C',C}[\mathrm{Id}]_{C,B} = [\mathrm{Id}]_{C',B'}[T]_{B',B}$.
   (d) Trouver la matrice colonne de $1 - 3x + x^2$ par rapport à C' en utilisant $[\mathrm{Id}]_{C',B'}$.
4. Soient $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$ des matrices inversibles. Montrer que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{F}$. Soient B et B' deux bases ordonnées de V.
   (a) Montrer que $[\mathrm{Id}_V]_{B',B}$ est inversible et trouver son inverse.
   (b) Soit $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$ telle que $A[v]_B = [v]_{B'}$ pour tout $v \in V$. Montrer que A est inversible.
   (c) Soit $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$ inversible. Trouver deux bases ordonnées C et C' de V telles que $A = [\mathrm{Id}_V]_{C',C}$.