Algèbre linéaire, corrigé de la série 1

Jonathan Scott

8 novembre 2005

1. (a) Définie sur $\mathbb{R}$, l'application f n'est ni injective, ni surjective. En effet, $f(1) = 1 = f(-1)$, ce qui montre le manque d'injectivité. Et f n'est pas surjective, puisque le carré d'un nombre réel quelconque est toujours ≥ 0.

   (b) Supposons que $a^3 = b^3$. Alors $a^3 - b^3 = 0$. On décompose l'expression pour obtenir

   $$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0.$$

   Donc soit $a = b$, soit $a^2 + ab + b^2 = 0$. Puisque a et b sont réels, a^2 et b^2 sont ≥ 0 ; si a et b ont la même signe, alors ab est ≥ 0 alors $a^2 + ab + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$. Si les signes de a et de b sont opposées, alors $ab < 0$. Supposons que $a \neq b$ et posons $m = \max(|a|, |b|)$. Alors $|ab| < m^2$, d'où $a^2 + b^2 + ab > 0$. Donc $a^3 \neq b^3$. On conclut que g est injective.

   Or, g est surjective, essentiellement car tout nombre réel possède une racine cube. Soit $c \in \mathbb{R}$. Le polynôme $\tilde{g}(t) = t^3 - c$ est continue. Supposons que $c \geq 0$, et choisissons $b > \max(c, 1)$. Alors $\tilde{g}(0) = -c < 0$ tandis que $\tilde{g}(b) = b^3 - c > 0$. Par le théoreme des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel a entre 0 et b tel que $\tilde{g}(a) = 0$, c-à-d que $a^3 = c$. Donc $g(a) = c$ et l'application g est surjective.

   Par conséquent, $g : t \mapsto t^3$ est une bijection.

   (c) L'application q n'est pas injective, par exemple $q(-2) = q(0) = q(2) = 0$, mais elle est surjective. En effet, si $y \geq 0$, alors

   $$\begin{aligned} (x-1)^2 - 1 = y &\Rightarrow (x-1)^2 = 1 + y \\ &\Rightarrow x - 1 = \sqrt{1+y} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{1+y} + 1 \end{aligned}$$

alors $y = q(\sqrt{1+y}+1)$. Pareillement, si $y < 0$, alors $y = q(\sqrt{1-y}-1)$.

Soit $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq 2\}$. Alors $q|_X$ est bijective, avec application réciproque

$$q^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{1+y}+1 & y \geq 0 \\ \sqrt{1-y}-1 & y < 0 \end{cases}$$

2. Supposons que la composée $g \circ f : X \to Z$ est injective. S'il existe $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, c-à-d $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Mais $g \circ f$ est injective, alors $x = x'$. Par conséquent, f est injective.

   Ensuite, supposons que $g \circ f : X \to Z$ est surjective, et soit $z \in Z$. Alors il existe $x \in X$ tel que $(g \circ f)(x) = z$. Donc $g(f(x)) = z$ et g est surjective.

3. (a) Pour montrer que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Rightarrow \exists x \in A \cup B \text{ t.q. } f(x) = y \\ x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \\ x \in A &\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \\ x \in B &\Rightarrow y = f(x) \in f(B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

   Réciproquement,

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cup f(B) &\Rightarrow y \in f(A) \text{ ou } f \in f(B) \\ y \in f(A) &\Rightarrow \exists x \in A \text{ t.q. } f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in A \cup B \text{ t.q. } f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in f(A \cup B) \\ y \in f(B) &\Rightarrow \exists x \in B \text{ t.q. } f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in A \cup B \text{ t.q. } f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in f(A \cup B) \end{aligned}$$

   Alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

   (b)

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B \text{ t.q. } f(x) = y \\ x \in A &\Rightarrow y \in f(A) \\ x \in B &\Rightarrow y \in f(B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

   Alors $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(c)

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cap f(B) &\Rightarrow \exists a \in A \text{ t.q. } y = f(a) \text{ et } \exists b \in B \text{ t.q. } y = f(b) \\ f \text{ injective} &\Rightarrow a = b \\ a = b \in A \cap B &\Rightarrow y \in f(A \cap B) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cup D) &\Leftrightarrow f(x) \in C \cup D \\ &\Leftrightarrow f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \end{aligned}$$

alors $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(e)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\Leftrightarrow f(x) \in C \cap D \\ &\Leftrightarrow f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

alors $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

4. $f_1 = f_4$ et $f_2 = f_3 = f_5$. Tandis que $f_6(x) = x$ *si* $x \neq 1$, f_6 et f_1 n'ont pas le même domaine de définition.

5. (a) *Réflexivité.* Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. $v - v = 0 = u - u$ alors $(u, v) \sim (u, v)$.
Symétrie. Supposons que $(u, v) \sim (u', v')$. Alors $v - v' = u - u'$. Donc $-(v - v') = -(u - u')$, d'où $v' - v = u' - u$. Par conséquent, $(u', v') \sim (u, v)$.
Transitivité. Supposons que $(u, v) \sim (u', v')$ et que $(u', v') = (u'', v'')$. Donc

$$\begin{aligned} v - v' &= u - u' \qquad (1) \\ v' - v'' &= u' - u'' \qquad (2) \end{aligned}$$

Effectuer l'addition de (1) et (2) pour trouver

$$v - v'' = u - u''$$

alors $(u, v) \sim (u'', v'')$.
La classe d'équivalence qui contient $(0, 1)$ consiste en toute paire (u, v) telle que $v - 1 = u - 0$. Alors c'est la droite $v = u + 1$.

(b) *Réflexivité.*

$$x \in X \Rightarrow f(x) = f(x) \Rightarrow x \sim x.$$

Symétrie.

$$x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow f(x') = f(x) \Rightarrow x' \sim x.$$

Transitivité.

$$\begin{aligned} x \sim x' \text{ et } x' \sim x'' &\Rightarrow f(x) = f(x') \text{ et } f(x') = f(x'') \\ &\Rightarrow f(x) = f(x'') \\ &\Rightarrow x \sim x''. \end{aligned}$$

6. (a) On veut vérifier l'énoncé

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

pour tout entier $n \geq 1$.
Puisque $1 = 1(1+1)/2$, $P(1)$ est vérifié.
Supposons $P(m)$. Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{m} k\right) + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} \\ &= \frac{m^2 + 3m + 2}{2} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \end{aligned}$$

alors $P(m) \Rightarrow P(m+1)$.
Par conséquent, $P(n)$ est vérifié pour tout $n \geq 1$.
La somme du premier n nombres impairs est

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2. \end{aligned}$$

(b) On pose

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

$P(1)$ est vérifié car $1^3 = 1^2$. Supposons $P(m)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2 + (m+1)^3 \\
&= \frac{m^2(m+1)^2}{2^2} + (m+1)^3 \\
&= \frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2(m^2 + 4(m+1))}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m+1} k\right)^2
\end{aligned}$$

alors $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ et $P(n)$ est vérifié pour tout $n \geq 1$.