Algèbre linéaire, Corrigé de la série 2

Jonathan Scott

8 novembre 2005

1. En mots, il faut montrer que v est l'opposé de $-v$. Puisque $-v$ est l'opposé de v, par définition on a $v+(-v) = 0$. L'addition est commutative, alors $(-v) + v = 0$. Donc v vérifie la condition rélévante, et l'opposé d'un vecteur est unique, alors v est l'opposé de $-v$.
2. Supposons que $a \in \mathbb{F}$, $v \in V$, $av = 0$, et $a \neq 0$. (Si $a = 0$ on a fini.) Alors $1/a$ existe, et
$$v = 1 \cdot v = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) v = \frac{1}{a}(av) = \frac{1}{a} \cdot (0) = 0$$
puisque $c \cdot 0 = 0$ pour tout $c \in \mathbb{F}$.
3. Dans chaque partie, on note U le sous-ensemble.
   (a) Le sous-ensemble U n'est pas vide, puisque $0+2(0)+3(0) = 0$ donc $(0, 0, 0) \in U$. Supposons que $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in U$. Alors
   $$(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3) = (x_1+2x_2+3x_3)+(y_1+2y_2+3y_3) = 0+0 = 0.$$
   Par conséquent, U est stable pour l'addition de vecteurs. Si $(x_1, x_2, x_3) \in U$ et $k \in \mathbb{F}$, alors
   $$(kx_1) + 2(kx_2) + 3(kx_3) = k(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = k \cdot 0 = 0$$
   donc U est stable pour la multiplication scalaire. On conclut que U est bien un sous-espace de $\mathbb{F}^3$.
   (b) U n'est pas vide, puisque $(4, 0, 0) \in U$. Mais U n'est stable ni pour l'addition de vecteurs, ni pour la multiplication scalaire. En effet, $(4, 0, 0) + (4, 0, 0) = 2(4, 0, 0) = (8, 0, 0) \notin U$.
   (c) $(0, 0, 0) \in U$ alors $U \neq \varnothing$. U est stable pour la multiplication scalaire : si $k \in \mathbb{F}$ et $(x_1, x_2, x_3) \in U$, alors
   $$(kx_1)(kx_2)(kx_3) = k^3(x_1x_2x_3) = k^3 \cdot 0 = 0.$$

Donc $k(x_1, x_2, x_3) \in U$. Mais U n'est pas stable pour l'addition de vecteurs. Par exemple, $(1,1,0), (0,0,1) \in U$, mais $(1,1,0) + (0,0,1) = (1,1,1) \notin U$ car $1^3 = 1 \neq 0$.

(d) Puisque $0 = 5 \cdot 0$, $(0,0,0) \in U$ et $U \neq \varnothing$. Si $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in U$, alors

$$x_1 + y_1 = 5x_3 + 5y_3 = 5(x_3 + y_3)$$

donc $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \in U$. Finalement, si $k \in \mathbb{F}$ et $(x_1, x_2, x_3) \in U$ alors

$$kx_1 = k(5x_3) = 5(kx_3)$$

d'où $k(x_1, x_2, x_3) \in U$. Par conséquent, U est un sous-espace de $\mathbb{F}^3$.

4. Il faut trouver un sous-ensemble « additif » de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas stable pour la multiplication scalaire. On pourrait immerser les entiers dans $\mathbb{R}^2$ d'une manière quelconque ; par exemple, posons

$$U = \{(m, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid m \in \mathbb{Z}\},$$

où $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Si $(m, 0), (n, 0) \in U$, alors

$$(m, 0) + (n, 0) = (m + n, 0) \in U$$

puisque $m + n \in \mathbb{Z}$. Également, si $(m, 0) \in U$ alors $-(m, 0) = (-m, 0) \in U$ car $-m \in \mathbb{Z}$. Par contre, $1/2 \in \mathbb{R}$ et $(1, 0) \in U$, mais

$$\frac{1}{2}(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \notin U.$$

Alors U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

5. Prenant l'inspiration de l'exercice 3(c), on pose

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}.$$

Géométriquement, U consiste en les axes dans $\mathbb{R}^2$. Si $k \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in U$, alors $(kx)(ky) = k^2xy = k^2 \cdot 0 = 0$ alors $k(x, y) \in U$. Par contre, $(1, 0)$ et $(0, 1) \in U$ mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U$.

6. Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une collection de sous-espaces de V, indexée par l'ensemble I. Pour $i \in I$, $0 \in U_i$, alors $0 \in \cap_{i \in I} U_i$, donc $\cap_{i \in I} U_i \neq \varnothing$. Supposons que $k \in \mathbb{F}$ et $u, v \in \cap_{i \in I} U_i$. Donc pour n'importe quel $i \in I$, $u, v \in U_i$. Mais U_i est un sous-espace vectoriel, alors ku et $u + v \in U_i$ – pour tout $i \in I$. Par conséquent, ku et $u + v \in \cap_{i \in I} U_i$. Alors l'intersection est un sous-espace vectoriel.

7. D'abord, supposons que $U \cup W$ est un sous-espace de V et $U \not\subset W$. Cela veut dire qu'il existe $u \in U$ tel que $u \notin W$. Soit $w \in W$. Puisque $U \cup W$ est un sous-espace, $u + w \in U \cup W$. Soit $u + w \in U$, soit $u + w \in W$. Si $u + w \in W$, alors $(u + w) + (-w) = u \in W$, contradiction. Alors $u + w \in U$, d'où $w = (-u) + (u + w) \in U$. Par conséquent, $W \subset U$.

   Par contre, si $U \subset W$, alors $U \cup W = W$ est un sous-espace, et pareillement si $W \subset U$.