Algèbre linéaire, Corrigé de la série 3

Jonathan Scott

8 novembre 2005

1. Tout d'abord, supposons que $b = 0$. Alors $a + bi = a$ est un nombre réel non-nul, dont la réciproque est tout simplement $1/a$.

   Ensuite, supposons que $a = 0$. Alors $a + bi = bi$ et $b \neq 0$. Alors $bi(c + di) = -bd + bci = 1 = 1 + 0i$, donc $-bd = 1$ et $bc = 0$. Il s'ensuit que $d = -1/b$ et $c = 0$. On conclut que

$$\frac{1}{bi} = \left(-\frac{1}{b}\right) i.$$

   On suppose désormais que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Par définition, $(a + bi)(c + di) = 1$. On effectue le calcul :

$$\begin{aligned} 1 &= (a + bi)(c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

   Alors la partie réelle, $ac - bd$, égale 1, tandis que la partie imaginaire, $ad + bc$, est nulle. Donc :

$$ac - bd = 1 \tag{1}$$
$$ad + bc = 0 \tag{2}$$

   De (2) on trouve

$$ad = -bc. \tag{3}$$

   En multipliant (1) par a, on obtient

$$\begin{aligned} a(ac - bd) &= a \\ a^2c - (ad)b &= a \\ a^2c - (-bc)b &= a \quad \text{par (3)} \\ a^2c + b^2c &= a \\ (a^2 + b^2)c &= a. \end{aligned}$$

Puisque a et b ne sont pas tous les deux zéro, $a^2 + b^2 \neq 0$. Alors on peut diviser pour obtenir

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}. \tag{4}$$

On substitue (4) dans (1) :

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - bd &= 1 \\
bd &= \frac{a^2}{a^2+b^2} - 1 \\
&= \frac{a^2 - (a^2+b^2)}{a^2+b^2} \\
&= \frac{-b^2}{a^2+b^2} \\
d &= \frac{-b}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

On peut diviser par b puisque $b \neq 0$. En conclusion,

$$\frac{1}{a+bi} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) i.$$

2. La solution consiste en un simple calcul :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 &= (1/2)^3(-1+\sqrt{3}i)^3 \\
&= (1/8)(-1+\sqrt{3}i)^2(-1+\sqrt{3}i) \\
&= (1/8)(-2-2\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i) \\
&= (1/8)\Big(\Big[(-2)(-1)+(2\sqrt{3})(\sqrt{3})\Big] \\
&\quad + \Big[(-2)(\sqrt{3})+(-2\sqrt{3})(-1)\Big]\, i\Big) \\
&= (1/8)\left([2+6] + [-6+6]\, i\right) \\
&= (1/8)(8+0i) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. (a) Les propriétés de commutativité et associativité se vérifient car l'addition et la multiplication dans $\mathbb{F}$ sont commutatives et associatives. L'élément neutre par rapport à l'addition est la matrice nulle, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. L'opposé de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ est

$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$. (Il faut faire le calcul pour vérifier que $A + (-A) = 0$.) Pour l'élément neutre par rapport à l'opération externe, $1 \cdot A = A$ car $1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$ pour $i, j = 1, 2$. Finalement, la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{F}$, alors

$$c(a_{ij} + b_{ij}) = ca_{ij} + cb_{ij}$$

pour $i, j = 1, 2$. Par conséquent, $c(A + B) = cA + cB$. En plus, si $e \in \mathbb{F}$, alors

$$(c + e)(a_{ij}) = ca_{ij} + ea_{ij}$$

qui signifie que $(c + e)A = cA + eA$.

(b) Soit T le sous-ensemble des matrices triangulaires. Le coefficient $(2, 1)$ de O est evidémment 0, donc $O \in T$.

Supposons que $A, B \in T$. Le coefficient $(2, 1)$ de $A + B$ est $a_{21} + b_{21} = 0 + 0 = 0$ alors $A + B \in T$. Plus explicitement, si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ alors

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, T est stable pour l'addition de matrices.

Supposons que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in T$ et $c \in \mathbb{F}$. Alors

$$c \cdot A = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ 0 & ca_{22} \end{bmatrix}$$

Donc $c \cdot A \in T$ et T est stable pour la multiplication scalaire. En conclusion, T est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{F})$.

(c) Soit S le sous-ensemble des matrices symétriques. Evidémment, la matrice nulle, O, est symétrique, alors $S \neq \varnothing$. Soient $A, B \in S$. Puisque $a_{12} + b_{12} = a_{21} + b_{21}$, $A + B$ est symétrique alors S est stable pour l'addition de matrices. Soit $c \in \mathbb{F}$. Alors $c \cdot A \in S$ car $ca_{12} = ca_{21}$. Donc S est stable pour la multiplication scalaire et S est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{F})$.

4. Soit Z l'ensemble des polynômes p qui vérifient $p(c) = 0$.

Le polynôme nul, $o(z) = 0 + 0z + 0z^2 + \cdots$ vérifie $o(c) = 0 + 0 \cdot c + 0 \cdot c^2 + \cdots = 0$ alors $o \in Z$ et $Z \neq \varnothing$. Soient $p, q \in Z$. Puisque $(p+q)(z) = p(z)+q(z)$, il s'ensuit que $(p+q)(c) = p(c)+q(c) = 0+0 = 0$

et alors $p+q \in Z$. Donc Z est stable pour l'addition. Soient $p \in Z$ et $a \in \mathbb{F}$. Alors $(ap)(c) = a(p(c)) = a \cdot 0 = 0$ donc $ap \in Z$. Par conséquent, Z est stable pour l'opération externe, et Z est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

5. (a) L'addition est commutative et associative car celle de V l'est. L'élément neutre par rapport à l'addition est l'application nulle : $o(x) = 0 \ \forall x \in X$. Alors $\forall f : X \to V$, $\forall x \in X$,

$$(f+o)(x) = f(x) + o(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

donc $f + o = f$. Pareillement, $o + f = f$ et o est bien l'élément neutre.

Pour $f : X \to V$ on définit l'application $g : X \to V$ définie par $g(x) = -f(x) \ \forall x \in X$. Alors $\forall x \in X$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$$

donc g est l'opposé de f. Pour tout $f : X \to V$, et $\forall x \in X$,

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

puisque $f(x)$ est un vecteur dans l'espace vectoriel V. Alors 1 est l'élément neutre par rapport à l'opération externe. Finalement, la multiplication scalaire est distributive par rapport à l'addition de vecteurs puisque la même propriété se vérifie dans V : $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, V)$, $\forall a, b \in \mathbb{F}$, et $\forall x \in X$,

$$[a(f+g)](x) = a[(f+g)(x)] = a[f(x)+g(x)] = af(x)+ag(x) = (af+ag)(x)$$

alors $a(f+g) = af + ag$. Également,

$$[(a+b)f](x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af+bf)(x)$$

alors $(a+b)f = af + bf$. Donc $\mathcal{F}(X, V)$ est bel et bien un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$.

(b) W est un sous-espace vectoriel, donc $0 \in W$. Par conséquent, l'application nulle $o \in [Z, W]$ et $[Z, W] \neq \varnothing$. Si $f, g \in [Z, W]$ alors $\forall z \in Z$,

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) \in W$$

parce que W est stable pour l'addition de vecteurs. Par conséquent, $[Z, W]$ l'est aussi. Si $a \in \mathbb{F}$ et $f \in [Z, W]$, alors $\forall z \in Z$,

$$(af)(z) = a(f(z)) \in W$$

car W est stable pour la multiplication scalaire. On conclut que $[Z, W]$ est véritablement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, V)$.

Le domaine d'une application dans $\mathcal{F}(Z, W)$ est Z tandis que celui d'une application dans $[Z, W]$ est X.

(c) L'intersection est le sous-espace trivial : si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_+ \cap \mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_-$ alors $f(x) = f(-x) = -f(x)$. Donc $2f(x) = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{F}$.

6. (a) L'ensemble U n'est pas vide car $0 \in \mathbb{F}$ alors $o(z) = 0z^2 + 0z^5 \in U$. Si $az^2 + az^5, bz^2 + bz^5 \in U$, alors

$$(az^2 + az^5) + (bz^2 + bz^5) = (a + b)z^2 + (a + b)z^5 \in U.$$

Donc U est stable pour l'opération interne d'addition de vecteurs. Si $c \in \mathbb{F}$ et $az^2 + az^5 \in U$, alors

$$c(az^2 + az^5) = (ca)z^2 + (ca)z^5 \in U.$$

Par conséquent, U est stable pour l'opération externe de multiplication scalaire. Donc U est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

(b) Il existe plusieurs possibilités, voilà une :

$$W = \{\sum a_i z^i \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \mid a_2 = 0\}.$$

C'est un bon exercice de vérifier que W est en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Étant donné un polynôme $p(z) = \sum c_i z^i$, on pose $q(z) = \sum a_i z^i$, où

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 2, \\ c_5 - c_2 & \text{si } i = 5, \\ c_i & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors $q(z) \in W$. On pose $r(z) = c_2 z^2 + c_2 z^5 \in U$. On vérifie facilement que $q(z) + r(z) = p(z)$. Donc $\mathcal{P}(\mathbb{F}) = U + W$.

Si $p(z) \in U \cap W$, alors $p(z) \in U$ d'où $p(z) = az^2 + az^5$. Mais $p(z) \in W$ donc le coefficient de z^2 est nul : $a = 0$. Alors $p(z) = 0$ est le polynôme nul. Par conséquent, $U \cap W = \{0\}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

7. Par exemple, on peut prendre

$$U_1 = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$U_2 = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

et

$$W = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Evidémment, $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus W$. Mais pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$(u, v) = (u, 0 + v) = (u, u - u + v) = (u, u) + (0, v - u)$$

alors $\mathbb{R}^2 = U_2 + W$. Si $(u, v) \in U_2 \cap W$, alors $(u, v) \in U_2$ donc $u = v$. Mais $(u, v) \in W$ signifie que $u = 0$. Par conséquent, $u = v = 0$. On conclut que $\mathbb{R}^2 = U_2 \oplus W$.