Algèbre linéaire, corrigé de la série 4

Jonathan Scott

9 novembre 2005

1. (a) On constate que $U + U' = W := \{(w, x, 0, z) \mid w, x, z \in \mathbb{F}\}$. En effet, un élément de U appartient également à W : si $(t_1, 2t_2, 0, 0) \in U$, on pose $w = t_1$, $x = 2t_2$, et $z = 0$. Par conséquent, $U \subset W$. De même, si $(s_1, s_2, 0, s_1) \in U'$, alors on pose $w = z = s_1$ et $x = s_2$ pour voir que $(s_1, s_2, 0, s_1) \in W$. Donc $U' \subset W$. Alors $U \cup U' \subset W$. Mais $U + U'$ est le plus petit sous-espace qui contient $U \cup U'$, ce qui signifie que $U + U' \subset W$.

   Il nous reste de montrer que $W \subset U + U'$. Il suffit de résoudre l'équation vectorielle

$$\begin{aligned}(w, x, 0, z) &= (t_1, 2t_2, 0, 0) + (s_1, s_2, 0, s_1)\\ &= (t_1 + s_1, 2t_2 + s_2, 0, s_1)\end{aligned}$$

   étant donné $(w, x, 0, z) \in W$. En regardant les derniers composants, on voit que $s_1 = z$. Donc, dans les premiers composants, $w = t_1 + z$, c-à-d $t_1 = w - z$. On a du choix pour les deuxièmes composants : si $2t_2 + s_2 = x$, on peut mettre, disons, $t_2 = 0$ et $s_2 = x$. Alors

$$(w - z, 0, 0, 0) \in U,$$

$$(z, x, 0, z) \in U',$$

   et

$$(w, x, 0, z) = (w - z, 0, 0, 0) + (z, x, 0, z).$$

   Alors $W \subset U + U'$. Par conséquent, $U + U' = W$.

   La somme n'est pas directe. On a déjà vu qu'on a un choix de t_2 et s_2 dans le calcul ci-dessus. Néanmoins, on calcule l'intersection $U \cap U'$. Si $\vec{v} = (t_1, 2t_2, 0, 0) = (s_1, s_2, 0, s_1)$, alors $t_1 = s_1 = 0$ et $s_2 = 2t_2$. Donc $\vec{v}$ est de la forme $(0, x, 0, 0)$. Par exemple, $(0, 1, 0, 0) \in U \cap U'$.

(b) Tout d'abord, la somme n'est pas directe puisque, par exemple, $z^2 \in U \cap V$ donc $U \cap V \neq \{0\}$. On constate que $U + V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Évidémment, $U + V \subset \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Si $p(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, on écrit

$$p(z) = \sum_{j=0}^{2n} a_j z^j.$$

(Il se peut que $a_{2n} = 0$.) On pose

$$q(z) = \sum_{j=0}^{n} a_{2j} z^{2j} \in U$$

(c'est la partie « paire » de $p(z)$) et

$$r(z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} z^{2j+1} = z \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} z^{2j} \in V$$

(c'est la partie « impaire » de $p(z)$). On voit que $p(z) = q(z) + r(z)$, donc $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \subset U + V$ et on a fini.

(c) $U + U' = \{(-s, t, s-t) \in \mathbb{F}^3 \mid s, t \in \mathbb{F}\}$. Si $(x, y, z) \in U + U'$, alors $x = -s$, $y = t$, et $z = s - t = -x - y$. Donc $U + U'$ est le plan déterminé par l'équation $x + y + z = 0$.

2. $U + U$ est le plus petit sous-espace de V qui contient $U \cup U = U$. Mais U est lui-même un sous-espace de V, donc $U + U = U$.

3. (a) L'addition de sous-espaces est commutative car l'addition vectorielle l'est. C'est-à-dire, $u_1 + u_2 \in U_1 + U_2 \Leftrightarrow u_1 + u_2 = u_2 + u_1 \in U_2 + U_1$. Par conséquent, $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$.

(b) L'addition de sous-espaces est associative car l'addition vectorielle l'est. Nous montrons que $(U_1+U_2)+U_3 \subset U_1+(U_2+U_3)$; l'inclusion réciproque est pareille.

Supposons que $v \in (U_1+U_2)+U_3$. Alors $v = u+u_3$, où $u \in U_1+U_2$ et $u_3 \in U_3$. Puisque $u \in U_1 + U_2$, on écrit $u = u_1 + u_2$. Donc $v = (u_1 + u_2) + u_3 = u_1 + (u_2 + u_3)$ car l'addition est associative. Or, $u_1 \in U_1$ et $u_2 + u_3 \in U_2 + U_3$, donc $v \in U_1 + (U_2 + U_3)$.

(c) Supposons qu'un tel sous-espace « neutre », Z, existe. Alors $Z + U = U$ pour tout $U \in \mathcal{S}(V)$. Alors U contient U et Z. Par conséquent, $Z \subset U$ pour tout sous-espace U de V. En particulier, $Z \subset \{0\}$. Donc $Z = \{0\}$. Par contre, pour tout $U \in \mathcal{S}(V)$, $\{0\} \subset U$. Par conséquent, $\{0\} + U = U + \{0\} = U$. Donc $\{0\}$ est l'élément neutre par rapport à l'addition de vecteurs.

(d) Si $U + W = \{0\}$, alors pour tout $u \in U$ et pour tout $w \in W$, $u + w = 0$. Alors $u = -w \in W$ et $w = -u \in U$. Par conséquent, $U \subset W$ et $W \subset U$, c-à-d $U = W$. Donc $U + U = \{0\}$. Mais par l'exercice 2, $U + U = U$. On conclut que $U = \{0\}$.

4. Pour simplifier la notation, on pose $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_+$, $\mathcal{F}_- = \mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_-$, et $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$.

   Puisque $\mathcal{F}_+ \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_- \subset \mathcal{F}$, il s'ensuit que $\mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_- \subset \mathcal{F}$.

   Par contre, si $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, on écrit

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

   Posons $f_+(x) = (1/2)(f(x) + f(-x))$ et $f_-(x) = (1/2)(f(x) - f(-x))$. On voit que $f_+(-x) = f_+(x)$ et $f_-(-x) = -f_-(x)$. Donc $f_+ \in \mathcal{F}_+$, $f_- \in \mathcal{F}_-$, et par conséquent, $f \in \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-$. Alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-$.

   Dans l'exercice 5(c) de la série 3, on a montré que $\mathcal{F}_+ \cap \mathcal{F}_- = \{0\}$. Donc la somme est directe :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ \oplus \mathcal{F}_-.$$

5. Supposons que $f \in [X, U + W]$. Soit $x \in X$. Alors il existe $u \in U$, $v \in W$, tels que

$$f(x) = u + w. \tag{1}$$

   On pose $g(x) = u$ et $h(x) = w$. Alors on a définit les applications $g : X \to U$ et $h : X \to W$, et $f = g + h \in [X, U] + [X, W]$. Donc $[X, U + W] \subset [X, U] + [X, W]$. Par contre, si $g \in [X, U]$ et $h \in [X, W]$, alors $\forall x \in X$,

$$(g + h)(x) = g(x) + h(x) \in U + W.$$

   Par conséquent, $g + h \in [X, U + W]$. Il s'ensuit que $[X, U + W] = [X, U] + [X, W]$.

   La somme est directe si et seulement si le choix de $g \in [X, U]$ et $h \in [X, W]$ dans la décomposition $f = g + h$ est unique. Ce choix est unique si et seulement si la décomposition (1) est unique pour tout $x \in X$ et pour tout $f \in \mathcal{F}(X, V)$. Si $U \cap W = \{0\}$ (c-à-d $U + W = U \oplus W$) alors (1) est unique. Par contre, supposons que (1) est unique pour tout $x \in X$ et pour tout $f \in \mathcal{F}(X, V)$. Si $u \in U \cap W$, on définit une application $f : X \to V$ par $f(x) = u$ pour tout $x \in X$. Puisque (1) est unique, et puisque l'on peut écrire $f(x) = u + 0 = 0 + u$, il s'ensuit que $u = 0$. En conclusion,

$$[X, U] + [X, W] = [X, U] \oplus [X, W] \Leftrightarrow U + W = U \oplus W.$$

6. Un polynôme $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{F})$ s'écrit sous la forme

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3. \tag{2}$$

On essaie de résoudre l'équation

$$p(z) = b_0(1) + b_1(1+z) + b_2(1+z+z^2) + b_3(1+z+z^2+z^3).$$

Alors

$$p(z) = (b_0 + b_1 + b_2 + b_3) + (b_1 + b_2 + b_3)z + (b_2 + b_3)z^2 + b_3 z^3. \tag{3}$$

Les coefficients dans (2) et (3) sont égaux, alors

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \\ a_1 &= b_1 + b_2 + b_3 \\ a_2 &= b_2 + b_3 \\ a_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Alors $b_3 = a_3$, $b_2 = a_2 - a_3$, $b_1 = a_1 - (a_2 - a_3) - a_3 = a_1 - a_2$, et $b_0 = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_2 - a_3) - a_3 = a_0 - a_1$. Donc

$$p(z) = (a_0 - a_1)(1) + (a_1 - a_2)(1+z) + (a_2 - a_3)(1+z+z^2) + a_3(1+z+z^2+z^3).$$

En conclusion, $\{1, 1+z, 1+z+z^2, 1+z+z^2+z^3\}$ engendre $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$.

7. Supposons que $v \in V$. Il faut montrer que v est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n$, et v_n. Puisque $\{v_1, \ldots, v_n\}$ engendre V, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ tels que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Il faut trouver $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ tels que

$$v = b_1(v_1 - v_2) + \cdots + b_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + b_n v_n. \tag{4}$$

De (4) on obtient

$$v = b_1 v_1 + (b_2 - b_1)v_2 + \cdots + (b_n - b_{n-1})v_n$$

alors il suffit de résoudre

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 - b_1 &= a_2 \\ &\vdots \\ b_n - b_{n-1} &= a_n. \end{aligned}$$

Alors $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_2 + a_3$, et ainsi de suite, jusqu'à $b_n = a_{n-1} + a_n$. Donc $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n\}$ engendre V.