Algèbre linéaire, corrigé de la série 5

Jonathan Scott

17 novembre 2005

1. Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in U$. Puisque $x_1 = 2x_5$ et $x_3 = x_2 + 5x_4$, on peut écrire

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (2x_5, x_2, x_2 + 5x_4, x_4, x_5) \\ &= x_2(0,1,1,0,0) + x_4(0,0,5,1,0) + x_5(2,0,0,0,1).\end{aligned}$$

   Alors tout élément de U est une combinaison linéaire de $(0,1,1,0,0)$, $(0,0,5,1,0)$, et $(2,0,0,0,1)$, c-à-d

$$U = \operatorname{span}((0,1,1,0,0), (0,0,5,1,0), (2,0,0,0,1)).$$

2. Je remarque en passant qu'il serait un exercice instructif de montrer l'algorithme d'Euclide pour les polynômes !

   (a) Si $p(z) = (z-c)q(z)$, alors $p(c) = (0)q(z) = 0$. Réciproquement, supposons que $p(c) = 0$. Par l'algorithme d'Euclide, il existe deux polynômes $q(z)$ et $r(z)$ tels que $p(z) = (z-c)q(z) + r(z)$. Puisque $\deg(z-c) = 1$, $0 \leq \deg r(z) < 1$, alors $\deg r(z) = 0$, c-à-d $r(z) = b \in \mathbb{F}$. Or, $0 = p(c) = (0)q(z) + b$, donc $b = 0$. Par conséquent, $p(z) = (z-c)q(z)$.

   (b) Soit $p(z) \in U$. Par l'exercice 2(a),

$$p(z) = (z-1)(az+b) = a(z^2 - z) + b(z-1).$$

   Alors $(z^2 - z, z - 1)$ engendre U.

   (c) Soit $p(z) \in W$. Par 2(a), $p(z) = (z-c)q(z)$. On écrit $q(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j$. Alors

$$p(z) = (z-c)\sum_{j=0}^{m} a_j z^j = \sum_{j=0}^{m} a_j \left(z^{j+1} - cz^j\right)$$

   alors la liste $(z - c, z^2 - cz, z^3 - cz^2, \ldots)$ engendre W.

3. Pour $1 \leq j \leq n$ on définit $\delta_j : X \to \mathbb{F}$ par

$$\delta_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : X \to \mathbb{F}$ une application. On constate que

$$f = f(1)\delta_1 + \cdots f(n)\delta_n = \sum_{j=1}^{n} f(j)\delta_j.$$

En effet, si $1 \leq i \leq n$, alors

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} f(j)\delta_j\right)(i) &= \sum_{j=1}^{n} f(j)(\delta_j(i)) \\ &= f(i). \end{aligned}$$

Par conséquent, $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ engendre $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, et donc l'espace est de dimension finie.

4. Puisque $(v_1 + w, \ldots, v_n + w)$ est linéairement dépendent, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, non tous nuls, tels que

$$a_1(v_1 + w) + \cdots a_n(v_n + w) = 0.$$

Alors

$$(a_1 + \cdots + a_n)w = -(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n). \tag{1}$$

Si $a_1 + \cdots + a_n = 0$, alors (1) implique que

$$0 = -0 \cdot w = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

Mais $(v_1, \ldots, v_n)$ est linéairement indépendente, donc

$$a_1 = \cdots = a_n = 0,$$

ce qui est une contradiction. Alors $a_1 + \cdots + a_n \neq 0$, et de (1) on déduire que

$$w = \frac{-1}{a_1 + \cdots + a_n}\left(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n\right).$$

Donc $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$.

5. Supposons que V est de dimension finie, engendré par $(w_1, \ldots, w_n)$. Par le théorème de la borne, n'importe quelle liste à (strictement) plus de n vecteurs dans V est

forcément linéairement dépendent. Donc il n'existe pas de suite (v_i) telle que $(v_1, \ldots, v_m)$ est linéairement indépendante si $m > n$.

Réciproquement, supposons que V est de dimension infinie. Alors $V \neq \{0\}$ car $\{0\}$ est engendré par la liste vide. On choisit $v_1 \in V$ t.q. $v_1 \neq 0$. On sait que (v_1) est linéairement indépendent. Par récurrence, supposons que l'on a construit une suite $v_1, \ldots, v_{k-1}$ telle que $(v_1, \ldots, v_{k-1})$ est linéairement indépendent. Alors $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{k-1}) \neq V$ car V n'est pas de dimension finie. Alors il existe $v_k \in V$, $v_k \notin \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{k-1})$. Il s'ensuit que $(v_1, \ldots, v_k)$ est linéairement indépendent. Preuve : supposons qu'il existe $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$ tels que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0.$$

Si $a_k \neq 0$ alors

$$v_k = (-a_1/a_k)v_1 + \cdots + (-a_{k-1}/a_k)v_k$$

donc $v_k \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{k-1})$, contradiction. Alors $a_k = 0$, et $a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1} = 0$. Il s'ensuit que $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$ puisque $(v_1, \ldots, v_{k-1})$ est supposée indépendante. Donc $(v_1, \ldots, v_k)$ est linéairement indépendente. Alors on a construit une suite $v_1, v_2, \ldots$ telle que $(v_1, \ldots, v_n)$ est linéairement indépendente quelque soit $n \geq 1$.

6. (a) Pareille à la vérification pour $\mathbb{F}^n$.

   (b) Pour $n \geq 1$, soit e_n le vecteur dans $\mathbb{F}^\infty$ dans lequel toute coordonnée est 0, sauf la coordonnée n, qui égale 1. Par exemple, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$ et $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$. Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est linéairement indépendente. Par l'exercice 5, $\mathbb{F}^\infty$ est de dimension infinie.

7. Les polynômes sont continus, donc on considère la suite $1, x, x^2, \ldots$. Supposons que

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0. \tag{2}$$

C'est une équation d'applications, alors (2) se vérifie pour tout $x \in [0, 1]$. Mais un polynôme non-nul de degré n possède n racines au plus, alors $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est le polynôme nul, c-à-d que $a_0 = \cdots = a_n = 0$. Donc $(1, \ldots, x^n)$ est indépendante pour tout $n \geq 1$, ce qui signifie que $C[0, 1]$ est de dimension infinie.