# Algèbre linéaire, corrigé de la série 6

Jonathan Scott

23 janvier 2006

1. Soit $\mathcal{W} = \{W \subset V \text{ un sous-espace} \mid \{v_1, \ldots, v_n\} \subset W\}$. Supposons que $W \in \mathcal{W}$. Puisque $W$ est stable pour l'addition vectorielle et pour la multiplication scalaire, toute combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$ appartient à $W$. Donc $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) \subset W$. Par conséquent, $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) \subset \cap_{W \in \mathcal{W}} W$.
   Inversement, on remarque que $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{W}$, donc $\cap_{W \in \mathcal{W}} W \subset \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. En conclusion, $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = \cap_{W \in \mathcal{W}} W$.
2. On utilise la méthode de la preuve du lemme du vecteur superflu. On remarque que

$$-2(1,0,1,0) + (2,3,0,2) = (0,3,-2,2)$$

   alors on peut enlever $(0,3,-2,2)$ de la liste sans changer le sous-espace engendré. Ensuite, en remarquant que $5 = 1 + 2(2)$, on calcule

$$(1,0,1,0) + 2(2,3,0,2) = (5,6,1,4)$$

   et on a presque trouver $(5,-1,-2,4)$ comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Pour arriver on utilise $(0,7,3,0)$ :

$$(1,0,1,0) + 2(2,3,0,2) - (0,7,3,0) = (5,-1,-2,4).$$

   Alors on peut enlever le vecteur $(5,-1,-2,4)$.
   On constate que la liste

$$((1,0,1,0),(2,3,0,2),(0,7,3,0))$$

   est linéairement indépendante. En effet, si

$$a(1,0,1,0) + b(2,3,0,2) + c(0,7,3,0) = (0,0,0,0)$$

   alors

$$(a+2b, 3b+7c, a+3c, 2b) = (0,0,0,0)$$

c'est-à-dire que $a + 2b = 0$, $3b + 7c = 0$, $a + 3c = 0$, et $2b = 0$. Donc $b = 0$, d'où $a = 0 - 2b = 0$ et $c = (-1/3)a = 0$.
Alors, $((1, 0, 1, 0), (2, 3, 0, 2), (0, 7, 3, 0))$ est linéairement indépendante, et

$$\begin{aligned}&\operatorname{span}((1,0,1,0),(2,3,0,2),(0,7,3,0))\\&\qquad= \operatorname{span}((1,0,1,0),(2,3,0,2),(0,3,-2,2),(0,7,3,0),(5,-1,-2,4)).\end{aligned}$$

3. Pour trouver une telle base, il nous faut un polynôme que contient le monôme $x^2$ mais qui n'est pas de degré 2 ; $x^2 + x^3$ est un tel polynôme. Alors on essaie la liste

$$(1, x, x^2 + x^3, x^3). \tag{1}$$

On remarque que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 \cdot 1 + a_1x + a_2(x^2 + x^3) + (a_3 - a_2)x^3$$

alors la liste (1) engendre $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Ensuite, supposons qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ tels que

$$a + bx + c(x^2 + x^3) + dx^3 = 0.$$

Alors

$$a + bx + cx^2 + (c + d)x^3 = 0.$$

Puisque $(1, x, x^2, x^3)$ est linéairement indépendante, il s'ensuit que $a = b = c = c+d = 0$. Alors $d = 0$, car $c = 0$ et $c+d = 0$. Donc (1) est linéairement indépendante. Par conséquent, elle est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$.

4. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de $U$. Supposons que $v \in V$, $v \notin U$. Alors $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est linéairement indépendante, donc $\dim V \geq n + 1 > n = \dim U$, contradiction. Donc il n'existe pas de tel vecteur $v$, c-à-d que $V \subset U$. Mais $U \subset V$ par définition, alors $U = V$.

5. On se rappelle que $\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = m+1$. Par conséquent, si $(p_0, \ldots, p_m)$ est linéairement indépendante, alors elle est une base de $\mathcal{P}$. En particulier, elle engendre $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$. On constate que n'importe quelle combinaison linéaire $q$ de $(p_0, \ldots, p_m)$ vérifie $q(3) = 0$. En effet, si $q = a_0p_0 + \cdots + a_mp_m$, alors

$$q(3) = a_0p_0(3) + \cdots + a_mp_m(3) = 0.$$

Alors le polynôme $1 \notin \operatorname{span}(p_0, \ldots, p_m)$, par exemple. Donc $(p_0, \ldots, p_m)$ n'est pas linéairement indépendante.

6. On remarque que $0 \in U$, alors $U \neq \varnothing$. Ensuite, soient $p, q \in U$. Alors $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = p(1 - x) + q(1 - x) = (p + q)(1 - x)$ donc $p + q \in U$ et $U$ est stable pour l'addition vectorielle. Si $a \in \mathbb{F}$ et $p \in U$, alors $(ap)(x) = a(p(x)) =$

$a(p(1-x)) = (ap)(1-x)$ donc $ap \in U$ et $U$ est stable pour la multiplication scalaire. Par conséquent, $U$ est un sous-espace de $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$.

En utilisant la base standard de $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, on écrit un polynôme quelconque dans $U$ sous la forme $p(x) = a + bx + cx^2$. Puisque $p \in U$, on a

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 &= a + b(1-x) + c(1-x)^2 \\ &= (a+b+c)1 + (-b-2c)x + cx^2 \end{aligned}$$

Par l'unicité des combinaisons linéaires d'une base, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} a &= a + b + c \\ b &= -b - 2c \\ c &= c. \end{aligned}$$

Donc $b+c = 0$ et il s'ensuit que $p(x) = a+b(x-x^2)$. Alors $(1, x-x^2)$ engendre $U$. Si $a+b(x-x^2) = 0$, alors $a+bx-bx^2 = 0$. Donc $a = b = 0$ car $(1, x, x^2)$ est linéairement indépendante. Par conséquent, $(1, x-x^2)$ est linéairement indépendante et donc elle est une base de $U$.

7. On sait que $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. Mais $\dim(U+W) = \dim \mathbb{F}^8 = 8$, alors $8 = 3+5-\dim(U \cap W)$. Donc $\dim(U \cap W) = 0$, c-à-d $U \cap W = \{0\}$.
8. Puisque $U + W \subset \mathbb{F}^9$, on a

$$9 = \dim \mathbb{F}^9 \geq \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 5 + 5 - \dim(U \cap W)$$

alors

$$9 \geq 10 - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U \cap W) \geq 1.$$

Or, $\dim\{0\} = 0$, donc $U \cap W \neq \{0\}$.