Algèbre linéaire, corrigé de la série 7

Jonathan Scott

5 décembre 2005

1. (a) $T_1(2(1,1)) = T(2,2) = 4 =\neq 2 = 2T_1(1,1)$. Donc T_1 n'est pas linéaire, car elle n'est pas homogène. Elle n'est pas additive non plus : $T_1((1,0)+(0,1)) = T_1(1,1) = 1$ tandis que $T_1(1,0) + T_1(0,1) = 0 + 0 = 0$.

   (b) $T_2\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = T_2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$ tandis que $2 \cdot T_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ alors T_2 n'est pas homogène et donc elle n'est pas linéaire. (Elle n'est pas additive non plus.)

   (c) Soient $a \in \mathbb{F}$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Alors

$$T_3(ap) = ((ap)(0), (ap)(1)) = (a(p(0)), a(p(1))) = a(p(0), p(1)) = aT_3(p)$$

   donc T_3 est homogène. Soit $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Alors

$$\begin{aligned} T_3(p+q) &= ((p+q)(0), (p+q)(1)) \\ &= (p(0)+q(0), p(1)+q(1)) \\ &= (p(0), p(1)) + (q(0), q(1)) \\ &= T_3p + T_3q \end{aligned}$$

   et T_3 est additive. Par conséquent, elle est linéaire.

   (d) Soient $a \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} T_4a(x_1, x_2, x_3) &= T_4(ax_1, ax_2, ax_3) \\ &= (ax_3 - 2ax_1, 3ax_2) \\ &= a(x_3 - 2x_1, 3x_2) \\ &= aT_4(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} T_4((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) &= T_4(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= ((x_3+y_3) - 2(x_1+y_1), 3(x_2+y_2)) \\ &= ((x_3 - 2x_1) + (y_3 - 2y_1), 3x_2 + 3y_2) \\ &= (x_3 - 2x_1, 3x_2) + (y_3 - 2y_2, 3y_2) \\ &= T_4(x_1, x_2, x_3) + T_4(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

   alors T_4 est linéaire.

(e) Soient $t \in \mathbb{R}$, $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$. Alors $T_5(t(a+bi)) = T_5(ta+tbi) = ta - tbi = t(a-bi) = tT_5(a+bi)$. Également, $T_5((a+bi)+(c+di)) = T_5((a+c)+(b+d)i) = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = T_5(a+bi)+T_5(c+di)$. Donc T_5 est $\mathbb{R}$-linéaire.

(f) T_6 n'est pas homogène par rapport aux scalaires complexes. Par exemple, on considère le scalaire $i \in \mathbb{C}$ et le vecteur $1+i \in \mathbb{C}$. Alors $T_6(i(1+i)) = T_6(-1+i) = -1-i$, tandis que $iT_6(1+i) = i(1-i) = 1+i$. Donc T_6 n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

2. (a) Si $T(x_1, x_2, x_3) = \vec{0} \in \mathbb{R}^4$, alors

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 && (1)\\ x_2 - x_3 &= 0 && (2)\\ x_1 + x_3 &= 0 && (3)\\ x_3 - x_2 &= 0. && (4) \end{aligned}$$

De (2) ou (4), $x_2 = x_3$. De (1) ou (3), $x_1 = -x_3$. Alors

$$(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_3, x_3) = x_3(-1, 1, 1).$$

Donc $\ker T$ est engendré par la base $((-1,1,1))$ (linéairement indépendante car $(-1,1,1) \neq (0,0,0)$). Puisque $\ker T \neq \{\vec{0}\}$, T n'est pas injective.
Un élément de $\operatorname{Im} T$ est de la forme

$$(x_1+x_2, x_2-x_3, x_1+x_3, x_3-x_2) = x_1(1,0,1,0) + x_2(1,1,0,-1) + x_3(0,-1,1,1).$$

Alors $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}((1,0,1,0),(1,1,0,-1),(0,-1,1,1))$. Du calcul du noyau, on sait que

$$(-1)(1,0,1,0) + (1,1,0,-1) + (0,-1,1,1) = (0,0,0,0).$$

Donc

$$(0,-1,1,1) = (1,0,1,0) - (1,1,0,-1)$$

et on peut enlever $(0,-1,1,1)$ (disons) de la liste génératrice sans changer l'espace engendré. Puisque $(1,0,1,0)$ n'est pas un multiple scalaire de $(1,1,0,-1)$, la liste $((1,0,1,0),(1,1,0,-1))$ est une base de $\operatorname{Im} T$.

(b) Supposons que $Tf = \vec{0} \in \mathbb{F}^n$. Alors $f(i) = 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. Donc $f = 0$, l'application nulle. Par conséquent, $\ker T = \{0\}$ et T est injective.
Si $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{F}^n$, on définit $f : \{1,\dots,n\} \to \mathbb{F}$ par $f(i) = x_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. Par définition, $Tf = (x_1,\dots,x_n)$. Donc T est surjective, c-à-d que $\operatorname{Im} T = \mathbb{F}^n$.

(c) Si $T(a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n) = 0$, alors $a_1+2a_2t+\cdots+na_nt^{n-1} = 0$. Puisque $(1,t,\dots,t^{n-1})$ est linéairement indépendante, $ja_j = 0$ pour tout $j \in \{1,\dots,n-1\}$. Il s'ensuit que $a_j = 0$ pour $j \in \{1,\dots,n-1\}$. Alors un polynôme dans le noyau de T est de la forme $p(t) = a_0$. Inversement, si p est un tel polynôme alors $Tp = 0$. Alors $\ker T$ est le sous-espace des polynômes « constants », c-à-d le sous-espace engendré par (1).
Si $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, alors $p \in \operatorname{Im} T$ si et seulement si $a_n = 0$. En effet, si $p \in \operatorname{Im} T$, alors par définition, $\deg p \leq n-1$ alors $a_n = 0$. Inversement, si $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}$, alors $p(t) = T(a_0t + (1/2)a_1t^2 + \cdots + (1/n)a_{n-1}t^n)$. Donc $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(1,t,\dots,t^{n-1})$.

3. Par exemple, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est « presque » homogène : si $a \geq 0$ alors $f(ax,ay) = af(x,y)$, mais si $a < 0$ alors $f(ax,ay) = -af(x,y)$. On essaie

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & y \geq 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & y < 0. \end{cases}$$

On vérifie que f est bien homogène mais non additive. Par exemple, $f(1,0) + f(0,1) = 1 + 1 = 2$ mais $f((1,0)+(0,1)) = f(1,1) = \sqrt{2}$.

4. (a) Supposons qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ tels que

$$a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n = 0.$$

L'application T est linéaire, alors

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = 0.$$

Mais T est supposée injective, donc

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

Puisque $(v_1, \ldots, v_n)$ est linéairement indépendante, $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Par conséquent, $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ est linéairement indépendante.

(b) Soit $w \in W$. Puisque T est surjective, il existe $v \in V$ tel que $Tv = w$. Or, $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre V, donc il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ tels que

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Alors

$$w = Tv = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n$$

c-à-d que $w \in \operatorname{span}(Tv_1, \ldots, Tv_n)$. Par conséquent, $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ engendre W.

5. Supposons que $(T \circ S)v = 0 \in W$. Alors $T(Sv) = 0$. Or, T est injective, alors $Sv = 0 \in V$. Mais S est injective, alors $v = 0 \in U$. Par conséquent, $T \circ S$ est injective.

6. Soit P un projecteur de V et soit $v \in V$. Puisque $(P \circ P)(v) = Pv$, on a $P(v - Pv) = 0$, donc $v - Pv \in \ker P$. Alors $v = (v - Pv) + Pv$, avec $v - Pv \in \ker P$ et $Pv \in \operatorname{Im} P$. Par conséquent, $V = \ker P + \operatorname{Im} P$. Si $w \in \ker P \cap \operatorname{Im} P$, alors $Pw = 0$ et $w = Pv$ pour un certain $v \in V$. Donc $0 = Pw = P(Pv) = Pv = w$. Alors $\ker P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$. Par conséquent, $V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$.

Si $v \in V$, alors $v = u + w$, où $u = v - Pv \in \ker P$ et $w = Pv \in \operatorname{Im} P$, et donc $P(u+w) = w$. On conclut que P est la projection sur $\operatorname{Im} P$ le long de $\ker P$.