Algèbre linéaire, corrigé de la série 8

Jonathan Scott

12 décembre 2005

1. (a) Tout d'abord, on calcule $\dim \ker T$. Un vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker T$ si et seulement si $2x_1 = 3x_3$ et $x_2 = -x_4$ si et seulement si

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((3/2)x_3, -x_4, x_3, x_4) = x_3(3/2, 0, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1).$$

Alors $\ker T = \operatorname{span}((3/2, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$. C'est facile à voir que $((3/2, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$ est linéairement indépendante, donc une base de $\ker T$. Alors $\dim \ker T = 2$. Selon la formule de dimension,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}^4 &= \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \\ 4 &= 2 + \dim \operatorname{Im} T \end{aligned}$$

alors $\dim \operatorname{Im} T = 2 = \dim \mathbb{F}^2$. Par l'exercice 4 de la série 6, $\operatorname{Im} T = \mathbb{F}^2$, c-à-d que T est surjective.

(b) On trouve que $((1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1/2, 1/3))$ est une base de U alors $\dim U = 2$. S'il existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4, \mathbb{F}^2)$ telle que $\ker T = U$, alors

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}^5 &= \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \\ 5 &= 2 + \dim \operatorname{Im} T \end{aligned}$$

alors $\dim \operatorname{Im} T = 3$. Mais $\operatorname{Im} T$ est un sous-espace de $\mathbb{F}^2$, donc $\dim \operatorname{Im} T \leq 2$, contradiction.

2. Si $u \in \ker(T \circ S)$, alors $Su \in \ker T$. Alors on obtient, par restriction, une application linéaire $S' : \ker(T \circ S) \to \ker T$, et $\operatorname{Im} S' \subset \ker T$. Par la formule de dimension, on a

$$\dim \ker(T \circ S) = \dim \ker S' + \dim \operatorname{Im} S'.$$

Mais $\ker S' = \ker S$ (car $\ker S \subset \ker(T \circ S)$) et $\operatorname{Im} S' \subset \ker T$, alors

$$\dim \ker(T \circ S) \leq \dim \ker S + \dim \ker T.$$

3. (a) Supposons que T est injective. Soit $(v_1, \ldots, v_m)$ une base de V. Par l'exercice 4(a) de la série 7, $(Tv_1, \ldots, Tv_m)$ est linéairement indépendante. Supposons que $\dim W = n$. On peut trouver des vecteurs $w_{m+1}, \ldots, w_n$ tels que

$$(Tv_1, \ldots, Tv_m, w_{m+1}, \ldots, w_n)$$

est une base de W. On définit $S : W \to V$ par $S(Tv_i) = v_i$ pour $i = 1, \ldots, m$, et $S(w_j) = 0$ pour $j = m+1, \ldots, n$. Par construction, $S \circ T = \mathrm{Id}_V$ sur la base donnée. Il s'ensuit que $S \circ T = \mathrm{Id}_V$.

Réciproquement, si $S \circ T = \mathrm{Id}_V$, alors $S \circ T$ est injective, donc T est injective par l'exercice 2 de la série 1.

(b) Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $Tu = (u, 0)$. On définit $S, S' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$S(x, y) = x \quad \text{et} \quad S'(x, y) = x + y.$$

Alors $S(Tu) = S(u, 0) = u$ et $S'(Tu) = S'(u, 0) = u + 0 = u$, mais $S \neq S'$ car $S(1, 1) = 1$ tandis que $S'(1, 1) = 2$, par exemple.

(c) Supposons que T est surjective et soit $(w_1, \ldots, w_n)$ une base de W. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe $v_i \in V$ tel que $Tv_i = w_i$. On définit $S : W \to V$ par $Sw_i = v_i$. Alors $T(Sw_i) = Tv_i = w_i$ pour $i = 1, \ldots n$. Il s'ensuit que $T(Sw) = w$ pour tout $w \in W$.

(d) Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x$. On définit $S, S' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par

$$Sx = (x, 0) \quad \text{et} \quad S'x = (x, x).$$

Alors $T(Sx) = T(x, 0) = x$ et $T(S'x) = T(x, x) = x$. Par contre, $S(1) = (1, 0)$ mais $S'(1) = (1, 1)$ alors $S \neq S'$.

(e) $S = S \circ \mathrm{Id}_W = S \circ (T \circ S') = (S \circ T) \circ S' = \mathrm{Id}_V \circ S' = S'$.

4. (a) L'application nulle n'est pas inversible.

(b) On prend la composition pour l'opération binaire. Il faut montrer que $GL(V)$ est stable pour la composition. Mais si S et T sont inversibles, on a vu dans le cours que $S \circ T$ est inversible, en fait, $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$. Donc $S \circ T \in GL(V)$. Remarquons que Id_V est inversible, donc $\mathrm{Id}_V \in GL(V)$.

i. Puisque $T \circ \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_V \circ T = T$ pour tout $T \in GL(V)$, Id_V est l'élément neutre par rapport à la composition.

ii. Puisque $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_V$, l'inverse T^{-1} est inversible (son inverse est T). Donc $T^{-1} \in GL(V)$.

iii. On sait déjà que la composition d'applications est associative.

En conclusion, $GL(V)$ est un groupe par rapport à la composition.

5. Supposons que $\dim V = m$ et $\dim W = n$. Soit $(v_1, \ldots, v_m)$ une base de V et soit $(w_1, \ldots, w_n)$ une base de W. Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ on définit

$$T_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_j & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Nous allons montrer que $(T_{ij}) = (T_{11}, \ldots, T_{mn})$ est une base de $\mathcal{L}(V, W)$.

Si $T : V \to W$ est linéaire, et $1 \leq k \leq m$, alors il existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ tels que

$$\begin{aligned} T(v_k) &= a_{k1}w_1 + \cdots + a_{kn}w_n \\ &= a_{k1}T_{k1}(v_k) + \cdots + a_{kn}T_{kn}(v_k) \\ &= (a_{k1}T_{k1} + \cdots + a_{kn}T_{kn})(v_k). \end{aligned}$$

Alors

$$T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}T_{ij}$$

et donc $\mathcal{L}(V, W)$ est engendré par $(T_{11}, \ldots, T_{mn})$. Si

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}T_{ij} = 0,$$

alors pour $k = 1, \ldots, m$,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}T_{ij}(v_k) = a_{k1}w_1 + \cdots + a_{kn}w_n = 0$$

donc $a_{k1} = \cdots = a_{kn} = 0$ (car (w_j) est une base). Alors $(T_{11}, \ldots, T_{mn})$ est linéairement indépendante, donc une base. On conclut que

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = mn = (\dim V)(\dim W).$$