Algèbre linéaire, corrigé de la série 9

Jonathan Scott

13 décembre 2005

1. (a) Pour $n \geq 0$, on pose $I(t^n) = (1/(n+1))t^{n+1}$. Alors $(D \circ I)(t^n) = D((1/(n+1))t^{n+1}) = (1/(n+1))D(t^{n+1}) = (1/(n+1))(n+1)t^n = t^n$. Puisque $D \circ I$ est l'identité sur une base de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, elle est l'identité.

   (b) On rappelle que la composée d'applications linéaires est encore linéaire, alors $D^k(p+q) = D^k p + D^k q$ et $D^k(ap) = aD^k p$ pour $a \in \mathbb{F}$, $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ et $k \geq 1$. Donc

$$\begin{aligned} T(p+q) &= ((p+q)(0), (D(p+q))(0), \ldots, (D^n(p+q))(0)) \\ &= ((p+q)(0), (Dp+Dq)(0), \ldots, (D^{n-1}p + D^n q)(0)) \\ &= (p(0)+q(0), (Dp)(0)+(Dq)(0), \ldots, (D^n p)(0) + (D^{n-1}q)(0)) \\ &= (p(0), (Dp)(0), \ldots, (D^n p)(0)) + (Dq)(0), \ldots, (D^n q)(0)) \\ &= Tp + Tq \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} T(ap) &= ((ap)(0), (D(ap))(0), \ldots, (D^n(ap))(0)) \\ &= ((ap)(0), (aDp)(0), \ldots, (aD^n p)(0)) \\ &= (a(p(0)), a((Dp)(0)), \ldots, a((D^n p)(0))) \\ &= aTp. \end{aligned}$$

   Alors T est bien linéaire.
   Un calcul vérifie que

$$D^k t^j = \begin{cases} j(j-1)\cdots(j-k+1)t^{j-k} & k \leq j, \\ 0 & k > j. \end{cases}$$

   Donc $(D^k t^j)(0) = j!$ si $j = k$ et 0 sinon. Donc un inverse est défini sur la base $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de $\mathbb{F}^{n+1}$ par

$$Se_j = (1/(j-1)!)t^{j-1} \text{ pour } j = 1, \ldots, n+1.$$

   (où on suit la convention que $0! = 1$.)

   (c) Par définition,

$$(Ff)(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = a_1 f(x_1) + \cdots + a_n f(x_n).$$

F est linéaire car $(f+g)(x_i) = f(x_i) + g(x_i)$ et $(af)(x_i) = a(f(x_i))$ pour tout i. L'inverse est trouvé tout simplement par réstriction. Si $T : V \to W$, alors $F^{-1}(T) = f$, où $f(x_i) = Tx_i$ pour tout i.

2. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. On définit $T : \mathcal{L}(V, \mathbb{F}) \to V$ par $Tf = \sum_{j=1}^n f(v_j)v_j$. L'application T est bien linéaire car chaque f l'est. Pour montrer que T est un isomorphisme, il suffit de trouver un inverse. Pour $i = 1, \ldots, n$, soit $Sv_i : V \to \mathbb{F}$ l'application linéaire définie sur la base par
$$(Sv_i)(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Alors les Sv_i déterminent une application linéaire $S : V \to \mathbb{F}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$. Alors $S(Tf)(v_j) = (S(\sum_{i=1}^n f(v_i)v_i))(v_j) = (\sum_{i=1}^n f(v_i)Sv_i)(v_j) = \sum_{i=1}^n f(v_i)(Sv_i)(v_j) = f(v_j)$. Donc $S(Tf) = f$. Par conséquent, $ST = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(V,\mathbb{F})}$.
Réciproquement, $T(Sv_i) = \sum_{j=1}^n (Sv_i)(v_j) \cdot v_j = v_i$, donc $TS = \mathrm{Id}_V$.
En conclusion, $S = T^{-1}$ et T est un isomorphisme.

3. (a) L'addition vectorielle de $V \times W$ est commutative et associative car celles de V et de W le sont. L'élément neutre additif est $(\vec{0}_V, \vec{0}_W)$. L'opposé de $(\vec{v}, \vec{w})$ est $(-\vec{v}, -\vec{w})$. L'élément neutre multiplicatif $1 \in \mathbb{F}$ vérifie bien $1(\vec{v}, \vec{w}) = (1\vec{v}, 1\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$. Finalement, la distributivité de la multiplication scalaire par rapport à l'addition vectorielle dans V et dans W l'implique dans $V \times W$.
   (b) L'énoncé s'ensuit des définitions.
   (c) $P_V((\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}', \vec{w}')) = P_V(\vec{v} + \vec{v}', \vec{w} + \vec{w}') = \vec{v} + \vec{v}' = P_V(\vec{v}) + P_V(\vec{v}')$. Aussi, $P_V(a(\vec{v}, \vec{w})) = P_V(a\vec{v}, a\vec{w}) = a\vec{v} = aP_V(\vec{v}, \vec{w})$, alors P_V est linéaire. Pareillement pour P_W.

4. (a) Soient $S, S' \in \mathcal{L}(U, V)$ et $u \in U$. Alors $T_\sharp(S + S')(u) = (T \circ (S + S'))(u) = T((S + S')(u)) = T(Su + S'u) = T(Su) + T(S'u) = (T \circ S)(u) + (T \circ S')(u) = T_\sharp(S)(u) + T_\sharp(S')(u) = (T_\sharp(S) + T_\sharp(S'))(u)$. Aussi, $T_\sharp(aS)(u) = (T \circ (aS))(u) = T((aS)(u)) = T(a \cdot Su) = aT(Su) = (aT_\sharp(S))(u)$. Donc $T_\sharp$ est linéaire.
   (b) Soient $S, S' \in \mathcal{L}(W, Z)$ et $w \in W$. Alors $T^\sharp(S + S')(w) = (S + S')(Tw) = S(Tw) + S'(Tw) = T^\sharp(S)(w) + T^\sharp(S')(w) = (T^\sharp(S) + T^\sharp(S'))(w)$. Aussi, $T^\sharp(aS)(w) = ((aS) \circ T)(w) = (aS)(Tw) = a(S(Tw)) = (aT^\sharp(S))(w)$. Donc $T^\sharp$ est linéaire.

5. (a) Soient $v, v' \in V$. Alors $T(v+v') = (T_1(v+v'), T_2(v+v')) = (T_1v + T_1v', T_2v + T_2v') = (T_1v, T_2v) + (T_1v', T_2v') = Tv + Tv'$. Soit $a \in \mathbb{F}$. Alors $T(av) = (T_1(av), T_2(av)) = (aT_1v, aT_2v) = a(T_1v, T_2v) = aTv$. Donc T est linéaire. Aussi, $P_i \circ T(v) = T_i(v)$ par construction.
   (b) Pour $i = 1, 2$, on définit $\varphi_i : \mathcal{L}(V, W_1 \times W_2) \to \mathcal{L}(V, W_i)$ par $\varphi_i(T) = (P_i)_\sharp(T)$ (voir l'exercice 4(a) pour la notation). Par (a), il existe une application linéaire $\varphi : \mathcal{L}(V, W_1 \times W_2) \to \mathcal{L}(V, W_1) \times \mathcal{L}(V, W_2)$ telle que $P_{\mathcal{L}(V,W_i)} \circ \varphi = \varphi_i$. Si $\varphi(T) = 0$ alors $\varphi_i(T) = 0$ pour $i = 1, 2$. Cela signifie que $(P_i)_\sharp(T) = 0$, c-à-d que $P_i \circ T = 0$. Donc $T(v) = (0, 0)$ pour tout $v \in V$ et $T = 0$. Par conséquent, φ est injective. Par (a), φ est surjective. Donc φ est un isomorphisme.

6. (a) L'expression $v_1 + v_2$ est unique, alors T est bien définie. $T \circ J_i = T_i$ par définition. $T(a(v_1 + v_2)) = T(av_1 + av_2) = T_1(av_1) + T_2(av_2) = aT_1v_1 + aT_2v_2 = a(T_1v_1 + T_2v_2) = aT(v_1 + v_2)$. Aussi, $T((v_1 + v_2) + (v_1' + v_2')) = T((v_1 + v_1') + (v_2 + v_2')) = T_1(v_1 + v_1') + T_2(v_2 + v_2') = T_1v_1 + T_1v_1' + T_2v_2 + T_2v_2' = T_1v_1 + T_2v_2 + T_1v_1' + T_2v_2' = T(v_1 + v_2) + T(v_1' + v_2')$. Donc T est linéaire.

   (b) Par 4(b), $J_i : V_i \to V_1 \oplus V_2$ induit une application linéaire $J_i^\sharp : \mathfrak{L}(V_1 \oplus V_2, W) \to \mathfrak{L}(V_i, W)$ pour $i = 1, 2$. Par 5(a), $J_1^\sharp$ et $J_2^\sharp$ détermine une application linéaire $\theta : \mathfrak{L}(V_1 \oplus V_2, W) \to \mathfrak{L}(V_1, W) \times \mathfrak{L}(V_2, W)$ telle que $P_{\mathfrak{L}(V_i,W)} \circ \theta = J_i^\sharp$. Si $T : V_1 \oplus V_2 \to W$ est linéaire et $\theta(T) = 0$, alors $J_i^\sharp(T) = T \circ J_i = 0$ pour $i = 1, 2$. Alors $T(v_1) = 0$ pour tout v_1 in V_1 et pareillement pour V_2. Il s'ensuit que $T = 0$ et donc θ est injective. De plus, (a) signifie que θ est surjective. On conclut que θ est un isomorphisme.