

# Algèbre linéaire, corrigé de la série 10

Jonathan Scott

20 décembre 2005

1. (a)  $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$  et  $T(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$ , alors

$$[T]_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b)  $S(\vec{e}_1) = S(1, 0, 0) = (2, 0, 5, 1)$ ,  $S(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (3, -1, 7, 3)$ , et  $S(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = (6, -1, 6, 6)$ . Donc

$$[S]_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (c)  $D(1) = 0$ ,  $D(x) = 1$ ,  $D(x^2) = 2x = 2 \cdot 1 - 2(1-x)$ , et  $D(x^2 + x^3) = 2x + 3x^2 = (-1) \cdot 1 + 1(1-x) + 3(x+x^2)$ . Donc

$$[D]_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. (a)  $T(1, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t = 1$  et  $T(0, 1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t$ , alors  $T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot t = x + yt$ .

- (b)  $T\vec{e}_1 = t^2$ ,  $T\vec{e}_2 = t^3$ ,  $T\vec{e}_3 = 1$ , et  $T\vec{e}_4 = t$ . Donc

$$T(w, x, y, z) = wt^2 + xt^3 + y \cdot 1 + zt = y + zt + wt^2 + xt^3.$$

- (c) Il faudra expliciter l'expression de  $(x, y, z) \in \mathbb{F}^3$  dans la base  $B$ . Si  $(x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1)$ , alors  $a + b = x$ ,  $a + c = y$ , et  $b + c = z$ . On trouve que  $a = (1/2)(x + y - z)$ ,  $b = (1/2)(x - y + z)$ , et  $c = (1/2)(z - x + y)$ .

Pour trouver  $T$ , on remarque que  $T(1, 1, 0) = 1(1, 0) + 2(1, -1) = (3, -2)$ ,  $T(1, 0, 1) = 0(1, 0) + (-1)(1, -1) = (-1, 1)$ , et  $T(0, 1, 1) = 2(1, 0) + 1(1, -1) = (3, -1)$ . Alors

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \frac{1}{2}((x+y-z)T(1, 1, 0) + (x-y+z)T(1, 0, 1) + (z-x+y)T(0, 1, 1)) \\ &= \frac{1}{2}((x+y-z)(3, -2) + (x-y+z)(-1, 1) + (z-x+y)(3, -1)) \\ &= \frac{1}{2}(-x+7y-z, -4y+2z). \end{aligned}$$

3. (a) Si  $x = r \cos \alpha$  et  $y = r \sin \alpha$ , alors

$$\begin{aligned} T_\theta(x, y) &= (r \cos(\alpha + \theta), r \sin(\alpha + \theta)) \\ &= (r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta), r(\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta)) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta). \end{aligned}$$

- (b)  $T_\theta$  est linéaire car  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  sont des constantes fixes.  
(c)  $T_\theta(1, 0) = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $T_\theta(0, 1) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ , alors

$$[T_\theta]_{B,B} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

4. (a) Soit  $V$  un espace vectoriel quelconque. Si l'on enlève les axiomes d'un espace vectoriel qui s'agissent de la multiplication scalaire, les axiomes qui restent disent précisément que  $V$  est un groupe par rapport à l'addition vectorielle. En particulier,  $\mathbb{R}$  est un groupe par rapport à l'addition usuelle.  
(b) On pose  $T_\phi(x, y) = (u, v)$ . On effectue le calcul :

$$\begin{aligned} T_{\theta+\phi}(x, y) &= (x \cos(\theta + \phi) - y \sin(\theta + \phi), x \sin(\theta + \phi) + y \cos(\theta + \phi)) \\ &= (x \cos \theta \cos \phi - x \sin \theta \sin \phi - y \sin \theta \cos \phi - y \cos \theta \sin \phi, \\ &\quad x \sin \theta \cos \phi + x \cos \theta \sin \phi + y \cos \theta \cos \phi - y \sin \theta \sin \phi) \\ &= ((x \cos \phi - y \sin \phi) \cos \theta - (x \sin \phi + y \cos \phi) \sin \theta, \\ &\quad (x \cos \phi - y \sin \phi) \sin \theta + (x \sin \phi + y \cos \phi) \cos \theta) \\ &= (u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) \\ &= T_\theta(u, v) \\ &= T_\theta(T_\phi(x, y)) \end{aligned}$$