Algèbre linéaire, corrigé de la série 11

Jonathan Scott

31 janvier 2006

1. (a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) (2)

   (c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. (a) On effectue le calcul : pour $a, b \in \mathbb{F}$ et $p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{F})$, on a

$$\begin{aligned} T(ap+bq) &= ((ap+bq)(-1), D(ap+bq)(1)) \\ &= (ap(-1)+bq(-1), a(Dp)(1)+b(Dq)(1)) \\ &= a(p(-1),(Dp)(1))+b(q(-1),(Dp)(1)) \\ &= aTp+bTq. \end{aligned}$$

   Ici on a utilisé que l'evaluation et la dérivée D sont linéaires.

   (b) $T(1) = (1,0)$, $T(x) = (-1,1) = (-1)(1,0)+(0,1)$, $T(x^2) = (1,2) = (1,0)+2(0,1)$, et $T(x^3) = (-1,3) = (-1)(1,0)+3(0,1)$. Alors

$$[T]_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Donc

$$\begin{aligned} [T(4-3x+x^2-x^3)]_{B'} &= [T]_{B',B}[4-3x+x^2-x^3]_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   (c) $T(1) = (1,0)$, $T(1-x) = (2,-1) = -(-2,1)$, $T((1-x)^2) = (4,0)$, et $T((1-x)^3) = (8,0)$. Donc

$$[T]_{C',C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut savoir la matrice colonne de $4-3x+x^2-x^3$ par rapport à C.

$$\begin{aligned} 4-3x+x^2-x^3 &= a_0+a_1(1-x)+a_2(1-x)^2+a_3(1-x)^3 \\ &= (a_0+a_1+a_2+a_3)+(-a_1-2a_2-3a_3)x+(a_2+3a_3)x^2-a_3x^3 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} 4 &= a_0+a_1+a_2+a_3 \\ -3 &= -a_1-2a_2-3a_3 \\ 1 &= a_2+3a_3 \\ -1 &= -a_3. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $a_3=1$, $a_2=-2$, $a_1=4$, et $a_0=1$. Alors

$$[4-3x+x^2-x^3]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} [T(4-3x+x^2-x^3)]_{C'} &= [T]_{C',C}[4-3x+x^2-x^3]_C \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. (a) Si

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $a+b=0$ et $a-b=0$, aussi $c+d=0$ et $c-d=0$. Il s'ensuit que $a=b=c=d=0$ et C est linéairement indépendente. De la même manière, on trouve que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left((a+d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (a-d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (b+c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (b-c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

donc C engendre $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{F})$ est est une base.
Ensuite on considère l'équation

$$a(1+x+x^2)+b(x+x^2)+c(1+x^2) = \alpha+\beta x+\gamma x^2.$$

On trouve que $a+c=\alpha$, $a+b=\beta$, et $a+b+c=\gamma$. Donc $c=\gamma-\beta$, $b=\gamma-\alpha$, et $a=\alpha-\gamma+\beta$. En particulier, si $\alpha=\beta=\gamma=0$, alors $a=b=c=0$. Donc C' est linéairement indépendente et elle engendre $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$. Par conséquent, elle en est une base.

(b) On utilise les calculs de (a). On trouve que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$[\mathrm{Id}]_{C,B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $1 = (1+x+x^2) - (x+x^2)$, $x = (1+x+x^2) - (1+x^2)$, et $x^2 = -(1+x+x^2) + (x+x^2) + (1+x^2)$. Donc

$$[\mathrm{Id}]_{C',B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $[T]_{B',B}$, on fait plusieurs petits calculs :

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4,$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 + x,$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x + 3x^2,$$

et

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2,$$

alors

$$[T]_{B',B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 + x^2 = 3(1+x+x^2) - 3(x+x^2) + (1+x^2)$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 - x^2 = 5(1+x+x^2) - 5(x+x^2) - (1+x^2)$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 3x^2 = -(1+x+x^2) + (x+x^2) + 3(1+x^2)$$

et

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 2x - 3x^2 = 7(1+x+x^2) - 5(x+x^2) - 5(1+x^2).$$

Alors

$$[T]_{C',C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 7 \\ -3 & -5 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(c) Toujours des calculs :

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 = 4(1+x+x^2) - 4(x+x^2),$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2+x = 3(1+x+x^2) - 2(x+x^2) - (1+x^2),$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x+3x^2 = -4(1+x+x^2) + 3(x+x^2) + 4(1+x^2),$$

et

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 = -(1+x+x^2) + (x+x^2) + (1+x^2),$$

alors

$$[T]_{C',B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\begin{aligned} [T]_{C',C}[\mathrm{Id}]_{C,B} &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 7 \\ -3 & -5 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= [T]_{C',B}. \end{aligned}$$

Également,

$$\begin{aligned} [\mathrm{Id}]_{C',B'}[T]_{B',B} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= [T]_{C',B}. \end{aligned}$$

4. Soit $C \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{F})$. On rappelle que l'inverse de C est l'unique matrice D qui vérifie $CD = DC = I$. Or, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}((A^{-1}A)B) = B^{-1}(IB) = B^{-1}B = I$ et $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(IA^{-1}) = AA^{-1} = I$, alors $B^{-1}A^{-1} = (BA)^{-1}$.

5. (a) On remarque que $[\mathrm{Id}_V]_{B,B} = [\mathrm{Id}_V]_{B',B'} = I_n$. Donc $[\mathrm{Id}_V]_{B,B'}[\mathrm{Id}_V]_{B',B} = [\mathrm{Id}_V]_{B,B} = I_n$ et $[\mathrm{Id}_V]_{B',B}[\mathrm{Id}_V]_{B,B'} = [\mathrm{Id}_V]_{B',B'} = I_n$. Alors $([\mathrm{Id}_V]_{B',B})^{-1} = [\mathrm{Id}_V]_{B,B'}$.

   (b) Pour $1 \leq i \leq n$, on pose e_i la matrice colonne avec 1 dans le rang i et les 0 ailleurs. On note $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Alors $[v_i]_B = e_i$. Or, on vérifie que Ae_i est le i-ième colonne de A. Donc le i-ième colonne de A est $[v_i]_{B'}$. Il s'ensuit que $A = [\mathrm{Id}_V]_{B',B}$, donc A est inversible avec $A^{-1} = [\mathrm{Id}_V]_{B,B'}$.

(c) Soit $C' = (w_1, \ldots, w_n)$ une base quelconque de V. On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On pose, pour $1 \leq i \leq n$,

$$v_i = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \cdots + a_{ni}w_n.$$

Alors $[v_i]_{C'}$ est le i-ième colonne de A. Si $(v_1, \ldots, v_n)$ n'est pas linéairement indépendente, alors A n'est pas inversible, contradiction. Donc $C = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de V, et $A = [\mathrm{Id}_V]_{C',C}$.