## Algèbre linéaire, corrigé de la série 12

## Jonathan Scott

## 20 janvier 2006

- 1. (a) On remarque que T(0,0,1)=(0,0,1), alors 1 est bel et bien un valeur propre de T. Or, supposons que T(x,y,z)=(x,y,z). Donc  $x=x-\sqrt{3}y,\ y=\sqrt{3}x+y$ , et z=z. La première égalité signifie que y=0, donc la deuxième dit que x=0. Alors les vecteurs propres sont tous les vecteurs de la forme (0,0,z) pour  $z\in\mathbb{R}$ .
  - (b)  $T(x, y, 0) = (x \sqrt{3}y, \sqrt{3}x + y, 0)$  donc  $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  est invariant.
- 2. Vrai. Supposons que  $U \neq 0, V$ . On choisit une base  $(u_1, \ldots, u_m)$  de U et on la complète à une base  $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$  de V. On définit  $T: V \to V$  par  $Tu_i = u_{m+1}$  si i = 1 et  $Tu_i = 0$  autrement. Alors U n'est pas invariant pour T puisque  $Tu_1 = u_{m+1} \notin U$ .
- 3. Soit  $v \in \ker(T \lambda \cdot \operatorname{Id}_V)$ . Donc  $Tv = \lambda v$ . En appliquant S,  $S(Tv) = S(\lambda v)$ . Mais  $S \circ T = T \circ S$  et S est linéaire, donc  $T(Sv) = \lambda Sv$ . Par conséquent,  $Sv \in \ker(T \Lambda \cdot \operatorname{Id}_V)$  et ce noyau est invariant pour S.
- 4. On note  $E_{\lambda}$  l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .
  - (a) Supposons qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{F}$  et un polynôme non-nul  $a+bt \in \mathcal{P}_1(\mathbb{F})$  tels que  $T(a+bt) = \lambda(a+bt)$ . Alors  $b+at=\lambda a+(\lambda b)t$ . Par conséquent,  $b=\lambda a$  et  $a=\lambda b=\lambda(\lambda a)=\lambda^2 a$ . Donc  $(1-\lambda^2)a=0$ . Si a=0 alors  $b=\lambda a=\lambda 0=0$ , et on a supposé que a+bt est non-nul. Alors  $a\neq 0$ , d'où  $1-\lambda^2=(1+\lambda)(1-\lambda)=0$ . Donc  $\lambda=\pm 1$ . Si  $\lambda=1$ , alors b=a, et

$$E_1 = \{a + at \mid a \in \mathbb{F}.$$

Si  $\lambda = -1$ , alors b = -a, et

$$E_{-1} = \{ a - at \mid a \in \mathbb{F} \}.$$

En conclusion, les valeurs propres de T sont 1 et -1.

(b) Supposons que  $\lambda \in \mathbb{F}$  et que  $\vec{0} \neq (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{F}^3$  t.q.  $T(z_1, z_2, z_3) = \lambda(z_1, z_2, z_3)$ . Alors  $5z_1 = \lambda z_1, -z_3 = \lambda z_2$ , et  $0 = \lambda z_3$ . De cette dernière équation,  $\lambda = 0$  ou  $z_3 = 0$ . Si  $\lambda = 0$ , alors  $-z_3 = 0 \cdot z_2$ , donc  $z_3 = 0$ . Également,  $5z_1 = 0 \cdot z_1$ , donc  $z_1 = 0$ . Par conséquent,  $(z_1, z_2, z_3) = (0, z_2, 0)$ . Inversement,  $T(0, z_2, 0) = (0, 0, 0)$ , alors tout vecteur de la forme  $(0, z_2, 0)$  est un vecteur propre associé à 0. Donc

$$E_0 = \{(0, z_2, 0) \mid z_2 \in \mathbb{F}\}.$$

On remarque que  $E_0 = \ker T$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $z_3 = 0$ . Par conséquent,  $\lambda z_2 = -z_3 = 0$ . Alors  $z_2 = 0$  car  $\lambda \neq 0$ . De plus,  $\lambda z_1 = 5z_1$ . On a supposé que  $(z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)$ , et  $z_2 = z_3 = 0$ , donc  $z_1 \neq 0$ . Il s'ensuit que  $\lambda = 5$ . On remarque que  $T(z_1, 0, 0) = (5z_1, 0, 0)$ , alors

$$E_5 = \{(z_1, 0, 0) \mid z_1 \in \mathbb{F}\}.$$

Pour conclure, les valeurs propres de T sont 0 et 5.

(c) Supposons que  $\lambda \in \mathbb{C}$  et que  $(0,0,0) \neq (w_1,w_2,w_3) \in \mathbb{C}^3$  t.q.  $T(w_1,w_2,w_3) = \lambda(w_1,w_2,w_3)$ . Alors  $w_3 = \lambda w_1$ ,  $w_1 = \lambda w_2$ , et  $w_2 = \lambda w_3$ . Donc  $w_3 = \lambda(\lambda w_2) = \lambda^2(\lambda w_3) = \lambda^3 w_3$ . On l'écrit sous la forme  $(\lambda^3 - 1)w_3 = 0$ . Si  $w_3 = 0$ , alors  $w_2 = \lambda 0 = 0$  et  $w_1 = \lambda 0 = 0$ . Mais on a supposé que  $(w_1, w_2, w_3) \neq (0, 0, 0)$ . Donc  $w_3 \neq 0$ ; il s'ensuit que  $\lambda^3 - 1 = 0$ . Pour trouver les racines complexes du polynôme  $\lambda^3 - 1$  il faut le décomposer :

$$\lambda^{3} - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^{2} + \lambda + 1)$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - \omega)(\lambda - \bar{\omega})$$

οù

$$\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

et  $\bar{\omega}$  est le conjugé complexe :

$$\omega = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On trouve  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ , par exemple, avec la formule quadratique. C'est un bon exercice de montrer que  $\bar{\omega} = \omega^2$  et que  $1 = \omega^3$ . De toute façon,  $\lambda = 1, \omega$ , ou  $\bar{\omega}$ .

Si  $\lambda = 1$ , alors  $w_1 = w_2 = w_3$ , donc

$$E_1 = \{(w, w, w) \mid w \in \mathbb{C}\}.$$

Si  $\lambda = \omega$ , alors  $w_3 = \omega w_1$ , et  $w_2 = \omega w_3 = \omega^2 w_1 = \bar{\omega} w_1$ . Donc

$$E_{\omega} = \{ (w, \bar{\omega}w, \omega w) \mid w \in \mathbb{C} \}.$$

Finalement, si  $\lambda = \bar{\omega}$ , alors  $w_3 = \bar{\omega}w_1$  et  $w_2 = \bar{\omega}w_3 = \bar{\omega}^2w_1 = \omega w_1$ . Donc

$$E_{\bar{\omega}} = \{(w, \omega w, \bar{\omega} w) \mid w \in \mathbb{C}\}.$$

En conclusion, les valeurs propres de T sont  $1, \omega$ , et  $\bar{\omega}$ , où  $\omega$  est une racine primitive d'unité.

(d) Supposons que  $\lambda \in \mathbb{F}$  et que  $p(t) = a + bt + ct^2$  est un polynôme non-nul t.q.  $T(p) = \lambda p$ . Alors

$$t(b+2ct) = \lambda(a+bt+ct^2)$$
  
$$bt+2ct^2 = \lambda a + (\lambda b)t + (\lambda c)t^2.$$

Alors  $\lambda a = 0$ ,  $\lambda b = b$ , et  $\lambda c = 2c$ .

Soit  $\lambda = 0$ , soit a = 0, puisque  $\lambda a = 0$ . Si  $\lambda = 0$ , alors  $b = 0 \cdot b = 0$  et  $c = (1/2) \cdot 0 \cdot c = 0$ . Donc les vecteurs propres associés à  $\lambda = 0$  sont les polynômes constants : T(a) = tD(a) = t(0) = 0. Donc  $E_0 = \{a \mid a \in \mathbb{F}\}$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , alors a=0. Or,  $\lambda b=b$ , d'où  $(\lambda-1)b=0$ . Alors soit  $\lambda=1$ , soit b=0. Si  $\lambda=1$ , alors c=2c, donc c=0. On vérifie que T(bt)=tD(bt)=t(b)=bt, alors  $bt\in E_1$ . Donc

$$E_1 = \{bt \mid b \in \mathbb{F}\}.$$

Si  $\lambda \neq 0, 1$ , alors a = 0, b = 0 et  $\lambda c = 2c$ , c-à-d que  $(\lambda - 2)c = 0$ . Parce que p est un polynôme non-nul et a = b = 0,  $c \neq 0$ . Donc  $\lambda = 2$ , et  $T(ct^2) = tD(ct^2) = t(2ct) = 2ct^2$ . Alors

$$E_2 = \{ct^2 \mid c \in \mathbb{F}\}.$$

En conclusion, les valeurs propres de T sont 0, 1, et 2.

(e) Supposons que  $\lambda \in \mathbb{F}$  et que  $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$  est non-nul, t.q.  $T(x_1, \ldots, x_n) = \lambda(x_1, \ldots, x_n)$ . Alors pour tout  $i, \lambda x_i = x_1 + \cdots + x_n$ . Donc, pour tout  $i \neq 1, \lambda(x_1 - x_i) = 0$ . Si  $\lambda = 0$ , alors  $x_n = -x_1 - \cdots - x_{n-1}$ , donc

$$E_0 = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_1 - \dots - x_{n-1}) \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{F}\}.$$

Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $x_i = x_1$  pour tout i, et  $T(x, \dots, x) = (nx, \dots, nx) = n(x, \dots, x)$ . Donc  $\lambda = n$  et

$$E_n\{(x,\ldots,x)\mid x\in\mathbb{F}\}.$$

Pour conclure, les valeurs propres de T sont 0 et n.

5. Supposons  $\lambda$  est une valeur propre de  $S \circ T$ . Alors il existe un vecteur non-nul  $v \in V$  tel que  $S(Tv) = \lambda v$ .

Si Tv=0 alors S(Tv)=0, donc  $\lambda=0$ . En particulier, ni T ni  $S\circ T$  n'est inversible. Il faut montrer que 0 est une valeur propre de  $T\circ S$ , c-à-d que  $T\circ S$  n'est pas injectif. Si  $T\circ S$  est injectif, alors il est surjectif. Donc T est surjectif. Mais V est de dimension finie, alors T est également injectif, contradiction, car Tv=0. Par conséquent,  $T\circ S$  n'est pas injectif, et 0 est une valeur propre de  $T\circ S$ .

Supposons maintenant que  $Tv \neq 0$ . En appliquant T à l'équation  $S(Tv) = \lambda v$ , on trouve que  $T(S(Tv)) = (T \circ S)(Tv) = T(\lambda v) = \lambda Tv$ . Alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $T \circ S$ .

La démonstration que toute valeur propre de  $T \circ S$  est une valeur propre de  $S \circ T$  est symétrique.

- 6. Soient  $(v_1, \ldots, v_n)$  une base de V. Par hypothèse, il existe  $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$  tels que  $Tv_i = \lambda_i v_i$  pour tout i. De plus, pour tout  $i \neq 1$ ,  $T(v_1 v_i) = \lambda(v_1 v_i) = \lambda v_1 \lambda v_i$ . Mais  $T(v_1 v_i) = Tv_1 Tv_i = \lambda_1 v_1 \lambda_i v_i$ . Il s'ensuit que  $\lambda = \lambda_1$  et  $\lambda = \lambda_i$ . Alors  $\lambda_i = \lambda_1$  pour tout i. Donc  $Tv = \lambda_1 v$  pour tout  $v \in V$ , c-à-d que T est un multiple scalaire de  $\mathrm{Id}_V$ .
- 7. (a) Pour  $0 \le i \le n-1$ , on définit  $\delta_i : \{0, \dots, n-1\} \to \mathbb{F}$  par  $\delta_i(j) = 1$  si i = j et 0 autrement. On vérifie que  $(\delta_0, \dots, \delta_{n-1})$  est une base de  $\mathcal{F}(\{0, \dots, n-1\}, \mathbb{F})$ , et donc l'espace est de dimension n. Puisque la dimension est invariant par les isomorphismes, dim V = n. Réciproquement, si dim V = n, on fixe une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de V. On définit  $T : V \to \mathcal{F}(\{0, \dots, n-1\}, \mathbb{F})$  par  $T(v_i) = \delta_i$ . Alors T est une bijection entre les bases, donc c'est un isomorphisme.
  - (b) On définit  $T: \mathbb{F}^{\infty} \to \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{F})$  par  $T(x_1, x_2, \ldots) = f$ , où  $f(n) = x_{n+1}$ . On vérifie que T est linéaire, et son inverse est l'application  $S: \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}^{\infty}$  définie par  $S(f) = (f(0), f(1), \ldots)$ .
  - (c) Supposons que  $\lambda \in \mathbb{F}$  et que  $(z_1, z_2, \ldots) \in \mathbb{F}^{\infty}$  est un vecteur non-nul tel que

$$(z_2, z_3, \ldots) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots).$$

Alors  $z_2 = \lambda z_1$ ,  $z_3 = \lambda z_2 = \lambda^2 z_1$ , et ainsi de suite; en générale,  $z_k = \lambda^{k-1} z_1$ . Donc, soit  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Par le calcul ci-dessus,  $\lambda$  est une valeur propre de T, avec

 $\dim V$ .

$$E_{\lambda} = \{(z, \lambda z, \lambda^2 z, \lambda^3 z, \ldots) \mid z \in \mathbb{F}\}.$$

(d) L'ensemble des valeurs propres, P, est exactement  $\mathbb{F}$ , et  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  où  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Donc  $\mathbb{F}$  n'est pas dénombrable, tandis que  $\mathbb{N}$  est dénombrable. Alors  $\operatorname{card} P > \operatorname{card} \mathbb{N} = \dim \mathbb{F}^{\infty}$ . Par contre, pour un opérateur sur un espace vectoriel de dimension *finie*, on a toujours  $\operatorname{card} P \leq$