Algèbre linéaire, corrigé de la série 13

Jonathan Scott

28 janvier 2006

1. (a) On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$ et que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ non-nul tel que $T_A(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+ay \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors $x + ay = \lambda x$ et $y = \lambda y$. Si $y = 0$ alors $x = \lambda x$. On a supposé $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, alors $x \neq 0$ donc $\lambda = 1$. De même, si $y \neq 0$, $\lambda = 1$. Alors $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de T_A. Pour trouver les vecteurs propres, on remarque que $x + ay = x$, donc $ay = 0$. Puisque $a \neq 0$ par hypothèse, $y = 0$. Un calcul montre que si $y = 0$, alors $T_A(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Donc $\mathbf{v} \in E_1$ si et seulement si $y = 0$, c-à-d

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) T_A est un *cisaillement* (*shear* en anglais).

2. (a)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En général,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix},$$

ce qu'on montre par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est par définition. Supposons que

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos((n-1)\theta) & -\sin((n-1)\theta) \\ \sin((n-1)\theta) & \cos((n-1)\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} A^n &= (A^{n-1})A \\ &= \begin{pmatrix} \cos((n-1)\theta) & -\sin((n-1)\theta) \\ \sin((n-1)\theta) & \cos((n-1)\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos((n-1)\theta)\cos\theta - \sin((n-1)\theta)\sin\theta & -\cos((n-1)\theta)\sin\theta - \sin((n-1)\theta)\cos\theta \\ \sin((n-1)\theta)\cos\theta + \cos((n-1)\theta)\sin\theta & \sin((n-1)\theta)\sin\theta + \cos((n-1)\theta)\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$ et que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ non-nul tel que $T_A(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = \lambda x \tag{1}$$

et

$$(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = \lambda y. \tag{2}$$

D'abord on suppose que $\sin\theta = 0$. En ce cas, $\cos\theta = \pm 1$. Alors $A = I$ ou $A = -I$. Dans le premier cas, $\lambda = 1$ est la seule valeur propre et tout vecteur dans $\mathbb{R}^2$ en est un vecteur propre. Dans le seconde cas, $\lambda = -1$ est la seule valeur propre et encore, tout vecteur un est un vecteur propre.

On suppose maintenant que $\sin\theta \neq 0$. De (1),

$$y = \frac{\cos\theta - \lambda}{\sin\theta} x.$$

On substitue cette expression dans (2) pour obtenir

$$(\sin\theta)x + \frac{(\cos\theta - \lambda)^2}{\sin\theta} x = 0,$$

ou

$$\left[(\sin^2\theta) + (\cos\theta - \lambda)^2\right] x = 0.$$

Si $x = 0$ alors (1) signifie que $y = 0$, contradiction. Alors $(\sin^2\theta) + (\cos\theta - \lambda)^2 = 0$. Mais c'est la somme de carrés réels, alors chaque terme est forcément nul. En particulier, $\sin^2\theta = 0$, alors $\sin\theta = 0$, contradiction.

En conclusion, si $\sin\theta \neq 0$ (c-à-d si $\theta \neq k\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$), alors T_A n'a pas de valeur propre.

(c) On a vu dans l'exercice 3 de la série 10 que T_A est une rotation dans le plan.

3. (a)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Soit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non-nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire tel que $T_A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Alors $\mathbf{v} = A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Donc $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

(c) Supposons tout d'abord que $\sin\theta = 0$, donc $\cos\theta = \pm 1$. Alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans le premier cas, on prend (par exemple) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$ et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$. On voit que $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ et $A\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2$, alors T_A est une réflexion dans l'axe des x. De manière pareille, dans le deuxième cas, $A\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1$ et $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$, alors T_A est une réflexion dans l'axe des y.

Maintenant supposons que $\sin\theta \neq 0$. On calcule les espaces propres pour les valeurs propres 1 et -1. Pour $\lambda = 1$, on a

$$(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = x$$

alors

$$y = x\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Posons $\theta = 2\alpha$. Alors $1 - \cos\theta = 1 - cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha$ et $\sin\theta = 2\sin\alpha\cos\alpha$, alors

$$y = x\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = x\tan\alpha.$$

(On remarque que $\cos\alpha \neq 0$ car $\sin\theta \neq 0$.) Si l'on prend, pour exemple, $x = \cos\alpha$, alors $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour $\lambda = 1$.

Pour $\lambda = -1$, on a

$$(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = -y$$

alors

$$x = -y\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = -y\tan\alpha.$$

On prend $y = \cos\alpha$. Donc $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour $\lambda = -1$.

Puisque $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes, ils sont linéairement indépendants et ils forment une base de $\mathbb{R}^2$. Puisque $T_A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ et $T_A\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2$, T_A est une réflexion dans la droite $y = (\tan\alpha)x$.

4. (a)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\right] &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i^2 & -i+i \\ i-i & -i^2+1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= I_2
\end{aligned}$$

alors $U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tels que $T_A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Alors

$$\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Donc $y = \lambda x = \lambda(-\lambda y) = -\lambda^2 y$. Si $y = 0$ alors $x = -\lambda y = 0$ mais $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, alors $y \neq 0$. Donc $\lambda^2 + 1 = 0$, c-à-d que $\lambda = \pm i$.

Pour $\lambda = i$, on a $y = ix$, donc $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est un vecteur propre. Pour $\lambda = -i$, on a $y = -ix$, donc $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre. Les valeurs propres i et $-i$ sont distinctes, alors $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$. On remarque que $U = (1/\sqrt{2})(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2)$.

(c)

$$\begin{aligned} UAU^{-1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$U\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et

$$(UAU^{-1})(U\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = i\mathbf{v}_1.$$

De même,

$$U\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(UAU^{-1})(U\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -i\mathbf{v}_2.$$

Alors $U\mathbf{v}_1$ et $U\mathbf{v}_2$ sont des vecteurs propres des valeurs propres distinctes. Il s'ensuit qu'ils forment une base de $\mathbb{C}^2$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{F}$ une valeur propre pour T, alors il existe $v \in V$, $v \neq 0$, tel que $Tv = \lambda v$. Or, $S(T(S^{-1}(Sv))) = S(Tv) = \lambda S(v)$, donc λ est une valeur propre pour $S \circ T \circ S^{-1}$ et Sv est un vecteur propre pour $S \circ T \circ S^{-1}$.

   Réciproquement, supposons que λ est une valeur propre pour $S \circ T \circ S^{-1}$ avec le vecteur propre $Sv \in V$. Donc $Tv = S^{-1}(S(T(S^{-1}(Sv)))) = S^{-1}(\lambda Sv) = \lambda v$. Alors λ est une valeur propre pour T avec le vecteur propre v.

6. On pose $n = \dim V$. Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de T. Puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont distinctes, $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de V.

   Or, pour $i = 1, \ldots, n$, on pose μ_i la valeur propre de S associée à v_i. Alors

$$S(Tv_i) = \lambda_i S v_i = \lambda_i \mu_i v_i = T(Sv_i).$$

   Donc, $S \circ T$ et $T \circ S$ coïncident sur une base de V. Alors $S \circ T = T \circ S$.