Algèbre linéaire, corrigé de la série 14

Jonathan Scott

6 février 2006

1. Les opérations des lignes sont notées par :
   - faire la multiplication de la ligne i par le scalaire non-nul a : aRi ;
   - transposer la ligne i et la ligne j : $Ri \leftrightarrow Rj$;
   - remplacer la ligne j par la ligne j plus a fois la ligne i : $Rj + aRi$.

   (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2-R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3-2R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3+R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1-2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 23 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R1} \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 23 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1+R2} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 23 & -35 \\ -3 & 4 & 23 & -33 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2+3R1} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 23 & -35 \\ 0 & 46 & 92 & -138 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/46)R2} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 23 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1+(-14)R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & -1 \\ 5 & 1 & -2 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & -9 & -8 \\ -1 & 6 & 15 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R5} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 15 & 8 \\ 5 & 1 & -2 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & -9 & -8 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 5 & 1 & -2 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & -9 & -8 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3-2R1]{R2+(-5)R1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 31 & 73 & 31 \\ 0 & 16 & 36 & 16 \\ 3 & -2 & -9 & -8 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R5-2R1]{R4-3R1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 31 & 73 & 31 \\ 0 & 16 & 36 & 16 \\ 0 & 16 & 36 & 16 \\ 0 & 15 & 37 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[R2-R3]{R4-R3} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -15 & -8 \\ 0 & 15 & 37 & 15 \\ 0 & 16 & 36 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 37 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R3-R2]{R5-R2}\begin{pmatrix}1&-6&-15&-8\\0&15&37&15\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R2\leftrightarrow R3}\begin{pmatrix}1&-6&-15&-8\\0&1&-1&1\\0&15&37&15\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3-15R2}\begin{pmatrix}1&-6&-15&-8\\0&1&-1&1\\0&0&52&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/52)R3}\begin{pmatrix}1&-6&-15&-8\\0&1&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R2+R3]{R1+15R3}\begin{pmatrix}1&-6&0&-8\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R1+6R2}\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

2. (a)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}3&-2&7&0&1\\0&1&-1&1&0\\1&3&-1&-2&3\\4&0&0&-5&2\end{array}\right)\xrightarrow{R1\leftrightarrow R3}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\3&-2&7&0&1\\4&0&0&-5&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-3R1}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&-11&10&6&-8\\4&0&0&-5&2\end{array}\right)\xrightarrow{R4-4R1}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&-11&10&6&-8\\0&-12&4&3&-10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3+11R2}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&-1&17&-8\\0&-12&4&3&-10\end{array}\right)\xrightarrow{R3+12R2}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&-1&17&-8\\0&0&-8&15&-10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)R3}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-17&8\\0&0&-8&15&-10\end{array}\right)\xrightarrow{R4+8R3}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-17&8\\0&0&0&-121&54\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1/121)R4}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-17&8\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)\xrightarrow{R3+17R4}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R2-R4}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&-1&0&54/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)\xrightarrow{R2+R3}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&-2&3\\0&1&0&0&104/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1+2R4}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&-1&0&255/121\\0&1&0&0&104/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)\xrightarrow{R1+R3}\left(\begin{array}{rrrr|r}1&3&0&0&305/121\\0&1&0&0&104/121\\0&0&1&0&50/121\\0&0&0&1&-54/121\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1-3R2} \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -7/121 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 104/121 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 50/121 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -54/121 \end{array}\right).$$

Donc $w = -7/121$, $x = 104/121$, $y = 50/121$ et $z = -54/121$.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R3-R1]{R2-R1} \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-2R2} \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

alors le système n'a pas de solution (on a $0x_5 = 5$).

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R3-2R1]{R2-R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R3-R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1/2)R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R1+R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Alors toute solution est de la forme $x = (1/2)(5 - 3t)$, $y = (1/2)(3 - t)$, $z = t$.

3. La matrice associé au système d'équeations linéaires donné est

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right).$$

On la transforme en forme échelonnée réduite :

$$A \xrightarrow{R2-R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow{R3-R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-2R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-3 \end{array}\right)$$

Si $a = 5$ et $b \neq 3$, alors le système n'est pas consistent (car $0 = 0z = b - 3 \neq 0$). Si $a \neq 5$ alors le système a exactement une solution. Si $a = 5$ et $b = 3$, alors le système a une solution paramétrisée par z. En effet, la forme échelonnée réduite en ce cas est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

alors $y = 1 - 2z$ et $x = z$.

4. On effectue la réduction en forme échelonnée réduite.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R1\leftrightarrow R3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R2-3R1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R3-2R1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -7 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R2\leftrightarrow R3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1/4)R2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -17 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1/17)R3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/17 & 3/17 \end{array}\right) \xrightarrow{R2-(7/4)R3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 7/68 & 13/68 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/17 & 3/17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1-5R3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 5/17 & 2/17 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 7/68 & 13/68 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/17 & 3/17 \end{array}\right) \xrightarrow{R1-2R2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/34 & -9/34 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 7/68 & 13/68 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/17 & 3/17 \end{array}\right)$$

alors

$$B = \frac{1}{68}\begin{pmatrix} 34 & 6 & -18 \\ -17 & 7 & 13 \\ 0 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $AB = BA = I$. Ainsi, la méthode de l'élimination de Gauss donne un algorithme pour calculer l'inverse d'une matrice inversible.

5. On pose

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $I_m = (\delta_{ij})$.
On considère d'abord l'opération des lignes $T_{\lambda Rk}$ qui multiplie la ligne k par un scalaire $\lambda \in \mathbb{F}$ non-nul, pour $1 \leq k \leq m$. On note $U_{\lambda Rk} = T_{\lambda Rk}(I_m)$. Donc $U_{\lambda Rk} = (u_{ij}) = ((1 + (\lambda - 1)\delta_{ik})\delta_{ij})$.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{F})$ et $1 \leq j \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned} (U_{\lambda Rk}A)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{m} u_{i\ell}a_{\ell j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{m} (1 + (\lambda - 1)\delta_{ik})\delta_{i\ell}a_{\ell j} \\ &= (1 + (\lambda - 1)\delta_{ik})a_{ij} \\ &= \begin{cases} \lambda a_{ij} & \text{si } i = k \\ a_{ij} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors $T_{\lambda Rk}(A) = U_{\lambda Rk}A$.
On remarque que $U_{\lambda Rk}$ est inversible. Son inverse est $U_{(1/\lambda)Rk}$.
Ensuite, on considère l'opération $T_{Rp\leftrightarrow Rq}$, qui échange les lignes p et q. On pose $U_{Rp\leftrightarrow Rq} = T_{Rp\leftrightarrow Rq}(I_m)$. On vérifie que $U_{Rp\leftrightarrow Rq} = (u_{ij})$, où $u_{ij} = (1 - \delta_{ip})(1 - \delta_{iq})\delta_{ij} + \delta_{ip}\delta_{qj} + \delta_{iq}\delta_{pj}$.
Par définition, $U_{Rp\leftrightarrow Rq}$ est son propre inverse.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{F})$ et $1 \leq j \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned}
(U_{Rp\leftrightarrow Rq}A)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{m} u_{i\ell}a_{\ell j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{m}((1-\delta_{ip})(1-\delta_{iq})\delta_{i\ell} + \delta_{ip}\delta_{q\ell} + \delta_{iq}\delta_{pj})a_{\ell j} \\
&= (1-\delta_{ip})(1-\delta_{iq})a_{ij} + \delta_{ip}a_{qj} + \delta_{iq}a_{pj} \\
&= \begin{cases} a_{qj} & \text{si } i = p \\ a_{pj} & \text{si } i = q \\ a_{ij} & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors $T_{Rp\leftrightarrow Rq}(A) = U_{Rp\leftrightarrow Rq}A$.
Finalement, on considère l'opération $T_{Rp+\lambda Rq}$, qui ajoute λ fois la ligne q à la ligne p. On pose $U_{Rp+\lambda Rq} = T_{Rp+\lambda Rq}(I_m)$. On vérifie que $U_{Rp\leftrightarrow Rq} = (u_{ij})$, où $u_{ij} = \delta_{ij} + \lambda\delta_{ip}\delta_{qj}$.
Par définition, $U_{Rp+\lambda Rq}$ est inversible. Son inverse est $U_{Rp-\lambda Rq}$.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{F})$ et $1 \leq j \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned}
(U_{Rp+\lambda Rq}A)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{m} u_{i\ell}a_{\ell j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{m}(\delta_{i\ell} + \lambda\delta_{ip}\delta_{q\ell})a_{\ell j} \\
&= a_{ij} + \lambda\delta_{ip}a_{qj} \\
&= \begin{cases} a_{pj} + \lambda a_{qj} & \text{si } i = p \\ a_{ij} & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors $T_{Rp+\lambda Rq}(A) = U_{Rp+\lambda Rq}A$.
On remarque que chaque application est linéaire car la multiplication des matrices l'est.