# Algèbre linéaire, corrigé de la série 15

Jonathan Scott

10 mars 2006

1. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R2-2R1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-2R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/9)R3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R1-2R3]{R2+4R3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 4/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 1/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

alors

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2i & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5+i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R1\leftrightarrow R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 2i & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5+i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-i)R1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -i & 0 \\ -3 & 1 & i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5+i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R3+R1]{R2+3R1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 6+i & 1 & -3i & 0 \\ 0 & 1 & 7+i & 0 & -i & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 6+i & 1 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2i & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R1-2R3]{R2-(6+i)R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -5i & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7+i & 2-15i & -6-i \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2i & 1 \end{array}\right).$$

Alors

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5i & -2 \\ 7+i & 2-15i & -6-i \\ -1 & 2i & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R3-aR2]{R2-R1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & -a & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1}$$

Si $a = 1$, alors on obtient la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 1 \end{array}\right)$$

alors il est impossible d'obtenir $I$ à la gauche. Donc $A$ n'est pas inversible si $a = 1$.
Si $a \neq 1$, alors on peut diviser par $1 - a$. Alors, on continue le calcul :

$$(1) \xrightarrow{(1-a)^{-1}R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & -a & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-(1-a^2)R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1 & -1-a & 1 \end{array}\right) \tag{2}$$

Si $a = -1$ alors $A$ n'est pas inversible. Si $a^2 \neq 1$, alors

$$(2) \xrightarrow{(1-a^2)^{-1}R3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-a^2} & \frac{-1}{1-a} & \frac{1}{1-a^2} \end{array}\right).$$

On a obtenu une matrice triangulaire supérieure à la gauche. Donc on peut continuer pour obtenir $I$ à la gauche. On conclut que $A$ est inversible si et seulement si $a \neq \pm 1$.

3. On trouve que $A^tA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$. Si $a = b = c = d = 0$ alors $A$ n'est pas inversible, sinon $A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}A^tA$.
4. Pour $A$ :
   (a) Soit $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$. On trouve que

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_4 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, alors $x_3 = \lambda x_1$, $2x_4 = \lambda x_2$, $-x_1 = \lambda x_3$, et $-x_2 = \lambda x_4$. Donc

$$x_3 = \lambda x_1 = -\lambda^2 x_3 \ \rightarrow \ (1 + \lambda^2)x_3 = 0$$

et

$$2x_4 = \lambda x_2 = -\lambda^2 x_4 \ \rightarrow \ (2 + \lambda^2)x_4 = 0.$$

Si $x_3 = 0$ alors $x_1 = 0$ donc $x_4 \neq 0$ ; sinon $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Donc $\lambda = \pm\sqrt{2}i$. Si $x_3 \neq 0$ alors $\lambda = \pm i$. Alors $A$ a quatre valeurs propres distinctes : $i$, $-i$, $\sqrt{2}i$, et $-\sqrt{2}i$.
Si $\lambda = \pm i$, alors $0 = (2 + (\pm i)^2)x_4 = x_4$. Donc $x_2 = -ix_4 = 0$. Aussi, $\pm ix_1 = x_3$. Alors

$$E_{\pm i} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ \pm iz \\ 0 \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Si $\lambda = \pm\sqrt{2}i$, alors $0 = (1 + (\pm\sqrt{2}i)^2)x_3 = -x_3$, d'où $x_1 = x_3 = 0$. Aussi, $x_4 = (\pm\sqrt{2}i/2)x_2$. Alors

$$E_{\pm\sqrt{2}i} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \\ \pm(\sqrt{2}i/2)z \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) La liste

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\i/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-i/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$$

est linéairement indépendente car elle consiste en vecteurs propres de valeurs propres distinctes. On pose

$$U=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\i&-i&0&0\\0&0&i/\sqrt{2}&-i/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Alors

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&\sqrt{2}i&0\\0&0&0&-\sqrt{2}i\end{pmatrix}.$$

Pour $B$ :

(a) Soit $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ un vecteur propre. Alors

$$B\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}\Leftrightarrow(B-\lambda I)\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

Pour résoudre cette équation matricielle, on utilise la méthode d'élimination de Gauss sur la matrice $(B-\lambda I|\mathbf{0})$. L'idée c'est de trouver des hypothèses sur $\lambda$ telles que la forme echelonnée réduite a une ligne des 0. On enlève la dernière colonne des 0 car elle ne fait rien dans l'élimination. Alors, on commence avec la matrice

$$\begin{pmatrix}3-\lambda&-2&0\\2&-2-\lambda&2\\1&-2&3-\lambda\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Or, on veut 1 dans la place $(1,1)$. Pour l'obtenir, on peut diviser la première ligne par $3-\lambda$ – mais il faudrait supposer que $\lambda\neq 3$ pour ne pas diviser par zéro. De plus, il serait nécessaire d'apporter un dénominateur de $3-\lambda$ presque partout – pas rigolo, ça. Si l'on y réflechit un petit instant, on voit qu'il serait beaucoup plus malin de tout simplement échanger la ligne 1 avec la ligne 3, où il existe déjà un 1 dans la première colonne. On obtient donc :

$$(3)\xrightarrow{R1\leftrightarrow R3}\begin{pmatrix}1&-2&3-\lambda\\2&-2-\lambda&2\\3-\lambda&-2&0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ensuite on procède comme d'habitude.

$$(4)\xrightarrow[R3-(3-\lambda)R1]{R2-2R1}\begin{pmatrix}1&-2&3-\lambda\\0&2-\lambda&2\lambda-4\\0&4-2\lambda&-(3-\lambda)^2\end{pmatrix} \tag{5}$$

$$(5)\xrightarrow{R3-2R2}\begin{pmatrix}1&-2&3-\lambda\\0&2-\lambda&2\lambda-4\\0&0&-(\lambda-1)^2\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Or, si $\lambda = 2$, alors la ligne 2 est nulle. Si $\lambda = 1$, alors la ligne 3 est nulle. Autrement, tous les trois lignes sont non-nulles et le système $B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ n'a que la solution $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Si $\lambda = 2$, on échange la ligne 2 et la ligne 3 puis soustrait la ligne 2 pour obtenir la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $z = 0$ et $x = 2y$. Donc

$$E_2 = \{(2t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Si $\lambda = 1$, on continue :

$$(6) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3-2R2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R1-R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $x = y = 2z$. Donc

$$E_1 = \{(2t, 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) On remarque que les seules valeurs propres sont 1 et 2, et $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$. Puisque $1 + 1 = 2 < 3$, il n'existe pas de base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$. On conclut que $B$ n'est pas diagonalisable.