Algèbre linéaire, corrigé de la série 16

Jonathan Scott

17 mars 2006

1. (a) $\langle (2,0),(0,0)\rangle = 4$ tandis que $2\langle (1,0),(0,0)\rangle = 2$ alors elle n'est pas bilinéaire. Elle n'est pas symétrique non plus : $\langle (1,2),(3,4)\rangle = 1^2 + 1\cdot 4 + 4^2 = 21$ tandis que $\langle (3,4),(1,2)\rangle = 3^2 + 3\cdot 2 + 2^2 = 19$.

   (b)
   $$\begin{aligned}\langle (x_1,x_2)+(x_1',x_2'),(y_1,y_2)\rangle &= \langle (x_1+x_1',x_2+x_2'),(y_1,y_2)\rangle \\ &= ((x_1+x_1')-(x_2+x_2'))(y_1+y_2) \\ &= (x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_1'+x_2')(y_1+y_2) \\ &= \langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle + \langle (x_1',x_2'),(y_1,y_2)\rangle\end{aligned}$$
   et pareillement dans la deuxième place. De plus, $\langle a(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \langle (ax_1,ax_2),(y_1,y_2)\rangle = (ax_1-ax_2)(y_1+y_2) = a(x_1-x_2)(y_1+y_2) = a\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle$. Pareillement dans la deuxième place. Alors elle est bilinéaire.

   Par contre, $\langle (2,1),(1,1)\rangle = (2-1)(1+1) = 2$ tandis que $\langle (1,1),(2,1)\rangle = (1-1)(2+1) = 0$ alors elle n'est pas symétrique.

   (c) $\langle -,-\rangle$ est bilinéaire puisque la multiplication dans $\mathbb{F}$ l'est. De plus, $\overline{\langle q,p\rangle} = \overline{q(1)\overline{p(1)}} = \overline{q(1)}p(1) = \langle p,q\rangle$. Donc $\langle -,-\rangle$ est symétrique. Ensuite, $\langle p,p\rangle = p(1)\overline{p(1)} = \|p(1)\|^2 \geq 0$ alors $\langle -,-\rangle$ est positive. Par contre $1-z \neq 0$ mais $\langle 1-z,1-z\rangle = 0$. Alors $\langle -,-\rangle$ est dégénérée ; elle n'est pas un produit scalaire.

   (d) $\langle -,-\rangle$ est linéaire dans le premier facteur mais pas dans le deuxième (par ex., prendre $f(x) = x^2$ et $g(x) = h(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{F}$, alors $f(g(3)+h(3)) = 4 \neq 2 = f(g(3)) + f(h(3)))$. Elle n'est pas symétrique non plus (par ex. prendre $f(x) = x^2$, $g(x) = 2$ $forall x \in \mathbb{F}$; donc $f(g(3)) = 4$ mais $g(f(3)) = 2$).

   (e) On utilise la linéairité de T pour montrer que $\langle -,-\rangle$ est bien bilinéaire. C'est facile à montrer que c'est symétrique et positive.

   Supposons que $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle = 0$. Alors $\|T\vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow T\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} \in \ker T$. Donc $\langle -,-\rangle$ est non-dégénérée, et donc un produit scalaire, si et seulement si T est injective.

2. (a) Par les propriétés élémentaires des intégraux,
   $$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$
   pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et $f,g \in C([a,b])$. Alors
   $$\int_a^b : C([a,b]) \to \mathbb{R}$$

est une application linéaire. Donc, pour $f, g, h \in C([a,b])$,

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle &= \int_a^b (f(t)+g(t))h(t)dt \\ &= \int_a^b (f(t)h(t)+g(t)h(t))dt \\ &= \int_a^b f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt \\ &= \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle\end{aligned}$$

alors $\langle -,-\rangle$ est linéaire dans le premier facteur. Pareillement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C([0,1])$,

$$\begin{aligned}\langle \alpha f, g\rangle &= \int_a^b (\alpha f)(t)g(t)dt \\ &= \int_a^b \alpha(f(t)g(t))dt \\ &= \alpha\int_a^b f(t)g(t)dt \\ &= \alpha\langle f,g\rangle\end{aligned}$$

alors $\langle -,-\rangle$ est homogène dans le premier facteur.
Ensuite, pour $f, g \in C([a,b])$,

$$\begin{aligned}\langle g, f\rangle &= \int_a^b g(t)f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)g(t)dt \\ &= \langle f,g\rangle\end{aligned}$$

alors la forme est symétrique. Il s'ensuit que la forme est linéaire et homogène dans le deuxième facteur.
Il reste de montrer que la forme est positive et définie. Soit $f \in C([a,b])$. Alors $f^2(t) = f(t)^2 \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Donc $\langle f,f\rangle \geq 0$, et $\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, par la definition de l'intégrale comme limite des sommes de Riemann. (En fait, si l'intégrale d'une fonction g est nulle, cela signifie que g est nulle *presque partout*. Mais on a supposé que f est continue, donc f^2 est continue, alors $f^2 = 0$ presque partout implique que $f^2 = 0$ partout.)

(b) On effectue le calcul :

$$\begin{aligned}\langle \sin(x), \cos(x)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

où on a utilisé la substitution $u = \sin t$, $du = \cos t dt$.

3. (a) On écrit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Alors

$$[(AB)^*]_{ij} = \overline{(AB)_{ji}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{jk}}\,\overline{b_{ki}}$$

et

$$(B^*A^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^*)_{ik}(A^*)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \overline{b_{ki}}\,\overline{a_{jk}}.$$

Donc $(AB)^* = B^*A^*$.

(b) La forme est linéaire dans le premier facteur car la multiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition de matrices et $(\zeta A)B = k(AB)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$. En particulier, $(\zeta \mathbf{v})A\mathbf{w}^* = \zeta(\mathbf{v}A\mathbf{w}^*)$, donc $\langle \zeta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_A = \zeta\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_A$ et la forme est homogène dans le premier facteur. De plus, $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_A = (\mathbf{u}+\mathbf{v})A\mathbf{w}^* = \mathbf{u}A\mathbf{w}^* + \mathbf{v}A\mathbf{w}^* = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle_A + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_A$ et la forme est additive dans le premier facteur. Ensuite, $\overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle} = (\mathbf{w}A\mathbf{v}^*)^* = \mathbf{v}^{**}A^*\mathbf{w}^* = \mathbf{v}A\mathbf{w}^* = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_A$ car $\mathbf{v}^{**} = \mathbf{v}$ et $A^* = A$. Donc la forme est symétrique, ce qui implique qu'elle est également conjugué-linéaire dans le deuxième facteur. En conclusion, la forme est bien bilinéaire et symétrique.

(c)

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_A &= \begin{pmatrix} i & 2 & 3+5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 0 \\ -2i & 3-i & 1 \\ 0 & 1 & 1+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 2 & 3+5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3-3i \\ 2i \\ 8-4i \end{pmatrix} \\
&= i(-3-3i) + 2(2i) + (3+5i)(8-4i) \\
&= 47 + 29i.
\end{aligned}$$

(d) Supposons que $A\mathbf{v}^* = \lambda\mathbf{v}^*$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (nous écrivons $\mathbf{v}^*$ au lieu de $\mathbf{v}$ pour avoir une matrice colonne). Puisque A est définie positive, on a

$$0 \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_A = \mathbf{v}A\mathbf{v}^* = \mathbf{v}(\lambda\mathbf{v}^*) = \lambda(\|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2).$$

Puisque $\|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2$ est réel et positif, il s'ensuit que λ est réel et positif.