Algèbre linéaire, corrigé de la série 18

Jonathan Scott

1er avril 2006

1. (a) On pose $w_1 = x$ et $W_1 = \text{span}(x)$. Alors $\langle w_1, w_1\rangle = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$.
$\langle x^2, w_1\rangle = \int_0^1 x^3 dx = 1/4$, alors $P_{W_1}(x^2) = \frac{\langle x^2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} x = (3/4)x$. Donc $w_2 = x^2 - (3/4)x$, et $\langle w_2, w_2\rangle = \int_0^1 (x^2 - (3/4)x)^2 dx = 1/80$. On pose $W_2 = \text{span}(w_1, w_2)$.
$\langle 1, w_1\rangle = \int_0^1 x dx = 1/2$ et $\langle 1, w_2\rangle = \int_0^1 (x^2 - (3/4)x) dx = -1/24$. Donc $P_{W_2}(1) = \frac{(1/2)}{(1/3)} x + \frac{(-1/24)}{(1/80)}(x^2 - (3/4)x) = 4x - (10/3)x^2$. Par conséquent, $w_3 = 1 - P_{W_2}(1) = 1 - 4x + (10/3)x^2$.
Aussi, $\langle w_3, w_3\rangle = \int_0^1 (1 - 4x + (10/3)x^2)^2 dx = 1/9$.
Finalement, on normalise. Alors $u_1 = w_1/\|w_1\| = (1/\sqrt{1/3})x = \sqrt{3}x$, $u_2 = w_2/\|w_2\| = (1/\sqrt{1/80})(x^2 - (3/4)x) = \sqrt{5}(4x^2 - 3x)$, et $u_3 = w_3/\|w_3\| = (1/\sqrt{1/9})(1 - 4x + (10/3)x^2) = 3 - 12x + 10x^2$.
Donc, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base $(x, x^2, 1)$, on obtient la base o.n. $(\sqrt{3}x, \sqrt{5}(4x^2 - 3x), 3 - 12x + 10x^2)$.

(b) On pose $w_1 = (1, 1, 0)$, donc $\langle w_1, w_1\rangle = 2$ et $\|w_1\| = \sqrt{2}$.
Ensuite,

$$\begin{aligned} w_2 &= (1,0,1) - \frac{\langle (1,0,1),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}(1,1,0) \\ &= (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) \\ &= (1/2, -1/2, 1). \end{aligned}$$

alors $\langle w_2, w_2\rangle = 3/2$ et $\|w_2\| = \sqrt{3/2}$.
Or,

$$\begin{aligned} w_3 &= (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}(1,1,0) + \frac{\langle (0,1,1),(1/2,-1/2,1)\rangle}{\langle (1/2,-1/2,1),(1/2,-1/2,1)\rangle}(1/2,-1/2,1) \\ &= (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{(1/2)}{(3/2)}(1/2,-1/2,1) \\ &= \frac{2}{3}(-1,1,1). \end{aligned}$$

Alors $\langle w_3, w_3\rangle = 4/3$ et $\|w_3\| = 2/\sqrt{3}$.
Quand on normalise, on trouve la base $((1/\sqrt{2})(1,1,0), (1/\sqrt{6})(1,-1,2), (1/\sqrt{3})(-1,1,1))$.

(c) On pose $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1$. Or, $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$. Donc $\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{2}$. On pose $W_1 = \text{span}(\mathbf{w}_1)$.

$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$, donc $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 - (-1/2)\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/2$, et $\|\mathbf{w}_2\| = 1/\sqrt{2}$.

Alors la base o.n. est $(1/\sqrt{2}\mathbf{w}_1, \sqrt{2}\mathbf{w}_2) = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right)$.

2. (a) $\mathbf{a}_j = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \cdots + \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n = Q\mathbf{r}_j$.

   (b) Puisque la $j$ème colonne de A est $\mathbf{a}_j = Q\mathbf{r}_j$, on a

$$A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] = [Q\mathbf{r}_1 \cdots Q\mathbf{r}_n] = Q[\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n] = QR.$$

   Par construction, $\mathbf{a}_j \in \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_j)$. Donc $R_{ij} = \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 0$ si $i > j$. Alors R est triangulaire supérieur.

   Pour montrer que R est inversible, il suffit de montrer que $R_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Mais $R_{ii} = \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{a}_i \rangle$. Si $R_{ii} = 0$, alors $\mathbf{a}_i \in \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{i-1}) = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1})$, contradiction.

   (c) On pose $\mathbf{a}_1 = [1\ 0\ 1]^t$ et $\mathbf{a}_2 = [1\ 1\ 0]^t$. On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver la base o.n. $\mathbf{q}_1 = (1/\sqrt{2})[1\ 0\ 1]^t$, $\mathbf{q}_2 = (1/\sqrt{6})[1\ 2\ -1]$.

   Ensuite on effectue les calculs : $R_{11} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_1 \rangle = \sqrt{2}$, $R_{21} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_1 \rangle = 0$, $R_{12} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = 1/\sqrt{2}$, et $R_{22} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_2 \rangle = 3/\sqrt{6}$. Donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

3. (a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. La vérification pour l'autre matrice est pareille. La première matrice donne une rotation dans le plan de α radians, tandis que la deuxième donne une réflexion dans la ligne de pente $\tan(\alpha/2)$ qui passe par l'origine (voir les exercices 2 et 3 de la série 13).

   (b) On note $A = [\mathrm{Id}_V]_{B',B}$. Par l'exercice 5(a) de la série 11, $A^{-1} = [\mathrm{Id}_V]_{B,B'}$. Soient $B = (u_1, \ldots, u_n)$ et $B' = (v_1, \ldots, v_n)$. Alors $u_j = \langle v_1, u_j \rangle v_1 + \cdots \langle v_n, u_j \rangle v_n$. Donc $A_{ij} = \langle v_i, u_j \rangle$. De plus, $v_j = \langle u_1, v_j \rangle u_1 + \cdots + \langle u_n, v_j \rangle u_n$, donc $(A^{-1})_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle = A_{ji}$. Par conséquent, $A^{-1} = A^t$, et A est orthogonale.

   (c) Tout d'abord, on remarque que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, car $(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = I^t = I$. Donc $(A^{-1})^t A^{-1} = (A^t)^{-1} A^{-1} = (AA^t)^{-1} = I^{-1} = I$. Pareillement, $A^{-1}(A^{-1})^t = A^{-1}(A^t)^{-1} = (A^t A)^{-1} = I^{-1} = I$. Alors A^{-1} est orthogonale.

   (d) Supposons que A et B sont orthogonales. Alors $(AB)^t(AB) = B^t A^t AB = B^t IB = B^t B = I$ et $(AB)(AB)^t = ABB^t A^t = AIA^t = AA^t = I$. Donc AB est orthogonale.

   On désigne $O(n)$ l'ensemble de matrices orthogonales $n \times n$ et $GL(n)$ le groupe de matrices inversibles $n \times n$ (cf. l'exercice 4 de la série 8). On remarque que $O(n) \subset GL(n)$ et $O(n)$ est stable par rapport à l'inversion et multiplication. De plus, $I \in O(n)$. Donc $O(n)$ est un *sous-groupe* de $GL(n)$ et on écrit $O(n) < GL(n)$.

   (e) Soit $\vec{a}_i$ la $i$ème ligne de A. Alors $\delta_{ij} = (AA^t)_{ij} = \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle$. Alors $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ est orthonormale.

   Soit $\mathbf{a}_i$ la $i$ème colonne de A. Alors $\delta_{ij} = (A^t A)_{ij} = \mathbf{a}_i^t \mathbf{a}_j = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$. Donc $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ est orthonormale.

   Les deux listes sont des bases de $\mathbb{R}^n$ car elles

(f) i. Si A est orthogonale, alors $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle AA^t\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle I\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ pour tout $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Réciproquement, supposons que $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ pour tout $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Notons $\mathbf{e}_i$ le vecteur de base standard. On remarque que $\mathbf{e}_i$ est la $i$ème colonne de I. Or, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle AA^t\mathbf{e}_i, \mathbf{w}\rangle = \langle A\mathbf{e}_i, A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{w}\rangle$, alors $\langle AA^t\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i, \mathbf{w}\rangle = 0$. Donc $AA^t\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$. Mais $AA^t\mathbf{e}_i$ est la $i$ème colonne de AA^t. Par conséquent, $AA^t = I$. Pareillement, $A^tA = I$. Donc A est orthogonale.

ii. Supposons que A est orthogonale. Donc pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|A\mathbf{v}\|^2 = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2$. Mais la norme est toujours positive, donc $\|A\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$. Réciproquement, supposons que $\|A\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned}
\|A(\mathbf{v}+\mathbf{w})\|^2 &= \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 \\
\langle A\mathbf{v}+A\mathbf{w}, A\mathbf{v}+A\mathbf{w}\rangle &= \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle \\
\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v}\rangle + 2\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle + \langle A\mathbf{w}, A\mathbf{w}\rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle \\
2\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle &= 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle
\end{aligned}$$

alors par (a), A est orthogonale.

4. D'abord on utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale de U. On pose $w_1 = (1,1,0,0)$. Alors

$$w_2 = (1,1,1,2) - \frac{\langle (1,1,0,0), (1,1,1,2)\rangle}{\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0)\rangle}(1,1,0,0) = (1,1,1,2) - (2/2)(1,1,0,0) = (0,0,1,2).$$

Alors $((1/\sqrt{2})(1,1,0,0), (1/\sqrt{5})(0,0,1,2))$ est une base orthonormale de U. Le vecteur $u \in U$ qui minimise $\|u - (1,2,3,4)\|$ est la projection orthogonale de $(1,2,3,4)$ dans U :

$$\begin{aligned}
u &= P_U(1,2,3,4) \\
&= \langle (1,2,3,4), (1/\sqrt{2})(1,1,0,0)\rangle (1/\sqrt{2})(1,1,0,0) + \langle (1,2,3,4), (1/\sqrt{5})(0,0,1,2)\rangle (1/\sqrt{5})(0,0,1,2) \\
&= (3/\sqrt{2})(1/\sqrt{2})(1,1,0,0) + (11/\sqrt{5})(1/\sqrt{5})(0,0,1,2) \\
&= (3/4, 3/4, 11/5, 22/5).
\end{aligned}$$

5. On pose $U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = 0, p'(0) = 0\}$. On vérifie que U s'agit d'un sous-espace ; en fait, si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alors $p(0) = 0$ ssi $a_0 = 0$ et $p'(0) = 0$ ssi $a_1 = 0$. Donc $U = \mathrm{span}(x^2, x^3)$. Il faut trouver une base orthonormale de U par rapport au produit scalaire $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Mais l'on remarque que $\langle x^2, x^3\rangle = 0$, donc il suffit de normaliser les deux polynômes. Or, $\langle x^2, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^4dx = 2/5$ et $\langle x^3, x^3\rangle = \int_{-1}^{1} x^6dx = 2/7$. Donc on pose $p_1(x) = \sqrt{5/2}x^2$ et $p_2(x) = \sqrt{7/2}x^3$; alors (p_1, p_2) est une base orthonormale de U.
Le polynôme que l'on cherche est la projection orthogonale de $2 + 3x$ dans U :

$$\begin{aligned}
p(x) &= (5/2)\langle 2+3x, x^2\rangle x^2 (7/2)\langle 2+3x, x^3\rangle x^3 \\
&= (5/2)(4/3)x^2 + (7/2)(6/5)x^3 \\
&= (10/3)x^2 + (21/5)x^3,
\end{aligned}$$

car $\langle 2+3x, x^2\rangle = \int_{-1}^{1}(2x^2 + 3x^3)dx = 4/3$ et $\langle 2+3x, x^3\rangle = \int_{-1}^{1}(2x^3 + 3x^4)dx = 6/5$.