Algèbre linéaire, corrigé de la série 19

Jonathan Scott

1er mai 2006

1. (a) La première équation donne $y = x + 1$. Si l'on substitue ceci dans la deuxième équation, on trouve que $x = -2$, donc $y = -1$. Par contre, si l'on substitue $(-2, -1)$ dans la troisième, on trouve que $2(-2) - (-1) = -3 \neq -1$. Donc le système est inconsistant.

   (b) On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Le système normal est $A^t A\vec{x} = A^t\vec{b}$. On effectue les calculs :

$$A^t\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 18 \end{bmatrix}$$

   Le système associé est donc

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

   ou

$$\begin{cases} 6x - 3y &= 9 \\ -3x + 18y &= -3. \end{cases}$$

   (c)

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{(6)(18) - (-3)(-3)} \begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Alors

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 6 & 11 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 2.5 & 1 \\ 4.0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.4 \\ 2.8 \\ 3.4 \end{bmatrix}$. Alors

$$A^t\vec{b} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 2.5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.4 \\ 2.8 \\ 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.05 \\ 10.7 \end{bmatrix}$$

et

$$A^tA = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 2.5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 2.5 & 1 \\ 4.0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.5 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

donc

$$(A^tA)^{-1} = \frac{1}{(23.5)(4)-(8)(8)} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 23.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 23.5 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 23.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24.05 \\ 10.7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.35 \\ 1.97 \end{bmatrix}$$

Donc la droite est donnée par l'équation $y = (0.35)x + (1.97)$.

3. On considère le système inconsistant

$$\begin{cases} a(-2)^2 + b(-2) + c &= 8.4 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c &= 2.7 \\ a(0)^2 + b(0) + c &= 0.8 \\ a(1)^2 + b(1) + c &= 3.1 \\ a(2)^2 + b(2) + c &= 9.2 \end{cases}$$

On voudrait trouver les valeurs de a, b et c qui donnent la meilleure approximation à une solution. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 8.4 \\ 2.7 \\ 0.8 \\ 3.1 \\ 9.2 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$A^tA = \begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

d'où

$$(A^tA)^{-1} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 0 \\ -10 & 0 & 34 \end{bmatrix}.$$

Ensuite,

$$A^t\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.4 \\ 2.7 \\ 0.8 \\ 3.1 \\ 9.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76.2 \\ 2 \\ 24.2 \end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 0 \\ -10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 76.2 \\ 2 \\ 24.2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.99 \\ 0.2 \\ 0.87 \end{bmatrix}$$

Alors, l'équation de la parabole est

$$y = (1.99)x^2 + (0.2)x + (0.87).$$

4. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base $(1, x, x^2)$, on trouve la base orthonormale $(1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1))$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. On remarque que $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = \int_0^1 p(x)e^x dx$ est un fonctionnel linéaire. Alors le polynôme q désiré est donné par la formule

$$q(x) = \varphi(1)(1) + \varphi(\sqrt{3}(2x-1)2)(\sqrt{3}(2x-1)) + \varphi(\sqrt{5}(6x^2-6x+1))(\sqrt{5}(6x^2-6x+1)).$$

Or, $\varphi(1) = \int_0^1 e^x dx = e-1$, $\varphi(x) = \int_0^1 xe^x dx = -1$, et $\varphi(x^2) = \int_0^1 x^2e^2 dx = e+2$. Donc $\varphi(\sqrt{3}(2x-1)) = \sqrt{3}[2\varphi(x)-\varphi(1)] = -\sqrt{3}(e+1)$ et $\varphi(\sqrt{5}(6x^2-6x+1)) = \sqrt{5}[6\varphi(x^2-6\varphi(x)+\varphi(1)] = \sqrt{5}[7e+17]$. Alors

$$\begin{aligned} q(x) &= (e-1)(1) + [-\sqrt{3}(e+1)]\sqrt{3}(2x-1) + \sqrt{5}[7e+17]\sqrt{5}(6x^2-6x+1) \\ &= 30(7e+17)x^2 - 6(36e+86)x + 3(13e+29). \end{aligned}$$

5. (a) Soient $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(ap+bq) = (ap+bq)(1/2) = ap(1/2) + bq(1/2) = a\varphi(p) + b\varphi(q)$. Donc φ est linéaire.
   (b) $q(x) = \varphi(1)(1) + \varphi(\sqrt{3}(2x-1))\sqrt{3}(2x-1) + \varphi(\sqrt{5}(6x^2-6x+1))\sqrt{5}(6x^2-6x+1)$. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\sqrt{3}(2x-1)) = 0$, et $\varphi(\sqrt{5}(6x^2-6x+1)) = -\sqrt{5}/2$. Donc $q(x) = (1)1 + (0)\sqrt{3}(2x-1) + (-\sqrt{5}/2)\sqrt{5}(6x^2-6x+1) = -3/2 + 15x - 15x^2$.
6. (a)

$$\begin{aligned} T^*(x,y) &= \langle (x,y), T(1,0)\rangle (1,0) + \langle (x,y), T(0,1)\rangle (0,1) \\ &= \langle (x,y), (1,0)\rangle (1,0) + \langle (x,y), (1,1)\rangle (0,1) \\ &= x(1,0) + (x+y)(0,1) \\ &= (x, x+y). \end{aligned}$$

   (b) Dans $\mathbb{F}$, le produit scalaire est donné par $\langle \lambda, \mu\rangle = \lambda\bar{\mu}$. Pour $\lambda \in \mathbb{F}$, on veut trouver $T^*\lambda \in V$ tel que $\langle v, T^*\lambda\rangle = Tv \cdot \bar{\lambda} = \langle v, w\rangle\bar{\lambda} = \langle v, \lambda w\rangle$ pour tout $v \in V$. Évidemment, $T^*\lambda = \lambda w$.
   (c)

$$\begin{aligned} T^*(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (x_1, \ldots, x_n), T(e_i)\rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle (x_1, \ldots, x_n), e_{i+1}\rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} e_i \\ &= (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0). \end{aligned}$$

7. On remarque que $\ker(T^* - \bar{\lambda}\mathrm{Id}_V) = \ker(T - \lambda\mathrm{Id}_V)^* = \mathrm{Im}(T - \lambda\mathrm{Id}_V)^\perp$. Alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de T^* ssi $\mathrm{Im}(T - \lambda\mathrm{Id}_V)^\perp \neq 0$ ssi $\mathrm{Im}(T - \lambda\mathrm{Id}_V) \neq V$ ssi $\ker(T - \lambda\mathrm{Id}_V) \neq 0$ ssi λ est une valeur propre de T.
8. Supposons que U est invariant par rapport à T, soient $u \in U$ et $v \in U^\perp$. Alors $\langle u, T^*v\rangle = \langle Tu, v\rangle = 0$ car $Tu \in U$ et $v \in U^\perp$. Donc $T^*(U^\perp) \subset U^\perp$. Réciproquement, supposons que $U^\perp$ est invariant par rapport à T^*. Soient $u \in U$ et $v \in U^\perp$. Alors $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle = 0$ car $u \in U$ et $T^*v \in U^\perp$. Donc $Tu \in (U^\perp)^\perp = U$. Par conséquent, $T(U) \subset U$.
9. (a) Si $\ker T = 0$ alors $\mathrm{Im}\, T^* = (\ker T)^\perp = V$ donc T^* est surjective. Réciproquement, si $\mathrm{Im}\, T^* = V$, alors $\ker T = \ker T^{**} = (\mathrm{Im}\, T^*)^\perp = V^\perp = 0$. Donc T est injective.
   (b) On identifie $T = T^{**}$ et applique (a).