Algèbre linéaire, corrigé de la série 21

Jonathan Scott

28 avril 2006

1. (a)

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle & (1)\\ \|x-y\|^2 &= \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle & (2)\end{aligned}$$

donc (1) − (2) nous donne

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle.$$

(b)

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle & (3)\\ \|x-y\|^2 &= \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle & (4)\\ i\|x+iy\|^2 &= i\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + i\langle y,y\rangle & (5)\\ i\|x-iy\|^2 &= i\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + i\langle y,y\rangle & (6)\end{aligned}$$

alors (3) − (4) + (5) − (6) donne

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 4\langle x,y\rangle.$$

2. On pose $A = [T]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Puisque B est orthonormale, $A^* = [T^*]_B$. Alors $A^*A = AA^*$. Explicitement,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alors $a^2+b^2 = a^2+c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow c = \pm b$. Si $c = b$ alors T est auto-adjoint, contradiction. Alors $c = -b$. Du coefficient $(1,2)$, on trouve maintenant que $ab - bd = -ab + bd$, donc $2b(a-d) = 0$. Or, $b \neq 0$ car T n'est pas auto-adjoint, donc $a = d$.

3. Si U est muni d'un produit scalaire par rapport auquel T est auto-adjoint, alors le théorème spectral réel nous dit qu'il existe une base B de U de vecteurs propres de T.

Réciproquement, supposons qu'il existe une base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de U telle que $Tv_i = \lambda_i v_i$ pour tout i. Nous construisons un produit scalaire tel que cette base est en fait orthonormale. On définit $\langle v_i, v_j\rangle = 1$ si $i = j$, 0 sinon. Ceci détermine une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle : U \times U \to \mathbb{R}$. Supposons que $u \in U$. On écrit $u = a_1v_1 + \cdots a_nv_n$. Donc $\langle u,u\rangle = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$, et $\langle u,u\rangle = 0$ si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, c.-à-d. si $u = 0$. Donc on a bel et bien définit un produit scalaire sur U. Or, si $u = \sum_{i=1}^n a_iv_i$ et $w = \sum_{j=1}^n b_iv_i$, alors $\langle Tu, v\rangle = \sum_{i,j} a_ib_j\langle Tv_i, v_j\rangle = \sum_{i,j} a_ib_j\lambda_i\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n a_ib_i\lambda_i$. Pareillement, $\langle u, Tw\rangle = \sum_{i=1}^n a_ib_i\lambda_i = \langle Tu, w\rangle$. Donc T est auto-adjoint.

4. On considère la réflexion R dans le vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{w} \neq \vec{0}$. On peut supposer que $\|\vec{w}\| = 1$. On choisit $\vec{w}' \in (\mathrm{span}(\vec{w}))^\perp$ de norme 1. (Rappelons que $\dim(\mathrm{span}(\vec{w}))^\perp = 1$.) Alors $R\vec{w} = 2P_{\vec{w}}\vec{w} - \vec{w} = 2\vec{w} - \vec{w} = \vec{w}$ et $R\vec{w}' = 2P_{\vec{w}}\vec{w}' - \vec{w}' = \vec{0} - \vec{w}' = -\vec{w}'$. Donc $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont des vecteurs propres de R. De plus, $(\vec{w}, \vec{w}')$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, R est diagonalisable.
5. Soit $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ une isométrie. Il existe une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $[S]_B = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ ou $[S]_B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Dans ce dernier cas, S est évidemment une rotation de l'angle α. Si $[S]_B = I_2$ alors S est une rotation de l'angle 0. Si $[S]_B = -I_2$ alors S est une rotation de l'angle π. Si $[S]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alors S est une réflexion dans $\vec{u}_2$. Si $[S]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ alors S est la réflexion dans $\vec{u}_1$.
6. Faux. Soit $V = \mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire euclidéen. On définit $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ par $S(1,0) = S(0,1) = (1,0)$. Alors $\|S(1,0)\| = \|S(0,1)\| = 1$, mais $\|S(1,-1)\| = 0 \neq \sqrt{2} = \|(1,-1)\|$. Donc S n'est pas une isométrie.
7. Une isométrie est normal, donc il existe une base orthonormale $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $[S]_B$ est diagonale en blocs, avec chaque bloc de taille 1×1 ou 2×2. Puisque la dimension est 3, au moins un bloc est de taille 1×1. Sans perte de généralité, on peut supposer que ce bloc est dans la première colonne. Donc $\vec{u}_1$ est un vecteur propre de S, c.-à-d. que $S\vec{u}_1 = \lambda\vec{u}_1$. Mais S est une isométrie, donc $1 = \|\vec{u}_1\| = \|S\vec{u}_1\| = |\lambda|$. Alors $\lambda = \pm 1$. En tout cas, $S^2\vec{u}_1 = \vec{u}_1$.