Algèbre linéaire, corrigé de la série 22

Jonathan Scott

5 mai 2006

1. (a) On remarque que $T^2(w,z) = T(z,0) = (0,0)$, alors tout $(w,z) \in \mathbb{C}^2$ est un vecteur propre généralisé associé à la valeur propre 0.

   (b) Les valeurs propres sont i et $-i$. Pour la valeur i, $(T - i \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})^2(w,z) = (T - i \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})(-z - iw, w - iz) = (-2w + 2iz, -2z - 2iw) = (0,0)$ si et seulement si $w = iz$. Donc les vecteurs propres généralisés pour la valeur propre i sont

   $$\ker(T - i \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})^2 = \{(iz, z) \mid z \in \mathbb{C}\}.$$

   Pareillement, les vecteurs propres généralisé pour la valeur propre $-i$ sont

   $$\ker(T + i \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})^2 = \{(w, iw) \mid w \in \mathbb{C}\}.$$

   (c) La seule valeur propre de T est 5. $(T - 5 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})^2(w,z) = (T - 5 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})[(5w + z, 5z) - (5w, 5z)] = (T - 5 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})(z,0) = (0,0)$. Donc $\ker(T - 5 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})^2 = \mathbb{C}^2$.

2. On utilise la récurrence sur m. Si $m = 1$, alors les hypothèses constate que $\vec{v} = T^0\vec{v} \neq \vec{0}$ et $T\vec{v} = \vec{0}$. En particulier, $(\vec{v})$ est linéairement indépendante. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour $m = k - 1$, et soit $\vec{v} \in V$ tel que $T^{k-1}\vec{v} \neq \vec{0}$ mais $T^k\vec{v} = \vec{0}$. On pose $\vec{w} = T\vec{v}$. Donc $T^{k-2}\vec{w} = T^{k-1}\vec{v} \neq \vec{0}$ mais $T^{k-1}\vec{w} = T^k\vec{v} = \vec{0}$. Par l'hypothèse de récurrence, $(\vec{w}, T\vec{w}, \ldots, T^{k-2}\vec{w}) = (T\vec{v}, T^2\vec{v}, \ldots, T^{k-1}\vec{v})$ est linéairement indépendante. Or, supposons que

   $$a_0\vec{v} + a_1T\vec{v} + \cdots + a_{k-1}T^{k-1}\vec{v} = \vec{0}.$$

   On applique T^{k-1} pour trouver que $a_0T^{k-1}\vec{v} = \vec{0}$. Or, on a supposé que $T^{k-1}\vec{v} \neq \vec{0}$. Par conséquent, $a_0 = 0$. Donc

   $$a_1T\vec{v} + \cdots + a_{k-1}T^{k-1}\vec{v} = \vec{0}.$$

   Mais on a montré que $(T\vec{v}, \ldots, T^{k-1}\vec{v})$ est linéairement indépendante. Donc $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Alors $(\vec{v}, T\vec{v}, \ldots, T^{k-1}\vec{v})$ est linéairement indépendante, ce qui termine la récurrence.

3. Puisque $S \circ T$ est nilpotent, il existe $k \geq 1$ tel que $(S \circ T)^k = 0$. Alors $0 = T \circ (S \circ T)^k \circ S = (T \circ S)^{k+1}$. Donc $T \circ S$ est nilpotent. (Preuve que $T \circ (S \circ T)^k \circ S = (T \circ S)^{k+1}$ par récurrence. Pour $k = 1$, $T \circ (S \circ T) \circ S = (T \circ S) \circ (T \circ S) = (T \circ S)^2$. Supposons vrai pour $k - 1$. Alors $T \circ (S \circ T)^k \circ S = T \circ (S \circ T)^{k-1} \circ (S \circ T) \circ S = (T \circ (S \circ T)^{k-1} \circ S) \circ (T \circ S) = (T \circ S)^k \circ (T \circ S) = (T \circ S)^{k+1}$.)

4. Supposons que $\vec{v} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{F}$ tels que $N\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Puisque N est nilpotent, $N^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$. Donc $\vec{0} = N^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$. Il s'ensuit que $\lambda = 0$.

5. N est auto-adjoint, alors par le théorème spectral il existe une base orthonormale $B = (u_1, \ldots, u_n)$ de V telle que $Nu_i = \lambda_i u_i$ pour tout i. Mais N est nilpotent, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i. Par conséquent, $Nu_i = 0$ pour tout i. Il s'ensuit que $N = 0$.

6. (a) Soient $V = \mathbb{F}^2$, $T(x,y) = (y,0)$. Alors $\ker T = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{F}\}$ et $\operatorname{Im} T = \{(y,0) \mid y \in \mathbb{F}\}$. Alors $\ker T = \operatorname{Im} T$ est de dimension 1. En particulier, $\mathbb{F}^2 \neq \ker T + \operatorname{Im} T$, alors $\mathbb{F}^2 \neq \ker T \oplus \operatorname{Im} T$.

(b) Tout d'abord, on montre que $\ker T^n \cap \operatorname{Im} T^n = 0$. Supposons que $v \in \ker T^n \cap \operatorname{Im} T^n$. Puisque $v \in \operatorname{Im} T^n$, il existe $w \in V$ tel que $v = T^n w$. Puisque $v \in \ker T^n$, $T^{2n} w = T^n v = 0$. Alors $w \in \ker T^{2n}$. Mais $n = \dim V$, alors $\ker T^{2n} = \ker T^n$. Donc $w \in \ker T^n$, d'où il s'ensuit que $v = T^n w = 0$. Par conséquent, $\ker T^n \cap \operatorname{Im} T^n = 0$. Donc $\ker T^n + \operatorname{Im} T^n = \ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^n$.

Or, $\dim(\ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^n) = \dim(\ker T^n) + \dim(\operatorname{Im} T^n)$ car $\dim(\ker T^n \cap \operatorname{Im} T^n) = 0$. Mais $\dim(\ker T^n) + \dim(\operatorname{Im} T^n) = \dim V$. Alors $\dim(\ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^n) = \dim V$. Puisque $\ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^n$ est un sous-espace de V de la même dimension que celle de V, on conclut que les deux espaces sont égaux.

7. (a) Si A est triangulaire supérieur, alors $A_{ij} = 0$ si $i > j$. Si les coefficients dans la diagonale sont nuls, alors $A_{ii} = 0$ pour tout i, c.-à-d. que $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$, ou si $i > j - 1$.

Supposons que $(A^{k-1})_{ij} = 0$ si $i > j - (k-1) = j - k + 1$. Alors

$$(A^k)_{ij} = (A^{k-1}A)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} (A^{k-1})_{i\ell} A_{\ell j}.$$

Or, $(A^{k-1})_{i\ell} = 0$ si $i > \ell - k + 1$, et $A_{\ell j} = 0$ si $\ell > j - 1$. Alors

$$(A^k)_{ij} = \sum_{\ell=i+k-1}^{j-1} (A^{k-1})_{i\ell} A_{\ell j}$$

ce qui est évidemment nul si $j - 1 < i + k - 1$, c.-à-d. si $i > k - j$. Alors, la récurrence est terminée.

Donc, si A est $n \times n$, alors $(A^n)_{ij} = 0$ si $i > j - n$. Mais $j \leq n$, alors $(A^n)_{ij} = 0$ pour tout i.

(b) Puisque N est un opérateur dans un espace vectoriel complexe, il existe une base B de V telle que $[N]_B$ est triangulaire supérieure. Les coefficients dans la diagonale sont des valeurs propres de N. Par hypothèse, la seule valeur propre de N est 0. Alors

$$[N]_B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $[N^n]_B = [N]_B^n = 0$. Par conséquent, $N^n = 0$ et N est nilpotent.

Considère l'opérateur $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $T(x, y, z) = (-y, x, 0)$. Alors 0 est la seule valeur propre de T, mais $T^2(x, y, z) = (-x, -y, 0)$ et $T^3(x, y, z) = (y, -x, 0)$, donc $\ker T^3 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^3$. Puisque $\ker T^k = \ker T^3$ pour $k \geq 3$, T n'est pas nilpotent.