Algèbre linéaire, corrigé de la série 23

Jonathan Scott

9 mai 2006

1. (a) $x^3+8x^2+16x-4=(x+5)(x^2+3x-1)+(2x+1)$. On remarque que $x-1=(1)(x-1)+(0)$ et que $x^2-1=(x+1)(x-1)+(0)$. Un calcul montre que $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)=(0)$. On devine que $x^n-1=(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)(x-1)$, ce qu'on vérifie par récurrence. Supposons que $x^k-1=(x^{k-1}+\cdots+x+1)(x-1)$. Alors $x^{k+1}-1=(x^{k+1}-x^k)+(x^k-1)=x^k(x-1)+(x^{k-1}+\cdots+x+1)(x-1)=(x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1)(x-1)$, et la récurrence est terminée.

   (b) Si q divise p, alors il existe $s\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$ tel que $p(x)=s(x)q(x)$ pour tout $x\in\mathbb{F}$. Soit $\lambda\in\mathbb{F}$ une racine de $q(x)$. Alors $p(\lambda)=s(\lambda)q(\lambda)=s(\lambda)(0)=0$. Donc λ est une racine de p.

   (c) Supposons d'abord que $x-\lambda$ divise p. Or, λ est une racine de $x-\lambda$, alors λ est une racine de p, par l'exercice ci-dessus.
   Réciproquement, supposons que λ est une racine de p. Par l'algorithme de division, il existe un polynôme r tel que $\deg r<\deg(x-\lambda)=1$ ou $r=0$, et un polynôme s tel que $p(x)=(x-\lambda)s(x)+r(x)$. Supposons que $r\neq 0$. Alors $\deg r=0$, c.-à-d. que $r(x)=a$, $a\in\mathbb{F}$, $a\neq 0$. Donc $0=p(\lambda)=(0)s(\lambda)+r(\lambda)=a$, contradiction. Donc $r=0$, et $p(x)=(x-\lambda)s(x)$, c.-à-d. que $(x-\lambda)$ divise p.

2. (a) Différence de carrés : $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Dans $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, $x^2+1=x^2-i^2=(x+i)(x-i)$, donc $x^4-1=(x+i)(x-i)(x+1)(x-1)$.

   (b) On utilise l'exercice 1(c) et cherche une racine. $(1)^3+(1)^2-2=0$, donc $x-1$ divise x^3+x^2-2. En effet, $x^3+x^2-2=(x^2+2x+2)(x-1)$. Or, essayons de trouver une racine de x^2+2x+2, c.-à-d. une solution à l'équation $x^2+2x+2=0$. Alors $(x+1)^2+1=0$, ou $(x+1)^2=-1$. Si $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, on ne peut plus décomposer. Mais si $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, alors $x+1=\pm i$, ou $x=-1\pm i$, alors $x^3+x^2-2=(x+1+i)(x+1-i)(x-1)$.

   (c) Supposons que $6x^2+x-2=(ax+b)(cx+d)$. Alors $6x^2+x-2=(ac)x^2+(ad+bc)x+bd$, donc $ac=6$, $bd=-2$, et $ad+bc=1$. Les possibilités pour a et c sont 1 et 6, -1 et -6, 2 et 3, et -2 et -3, tandis que les possibilités pour b et c sont 1 et -2 ou -1 et 2. Une combinaison qui donne $ad+bc=1$ est, par exemple, $a=2$, $b=-1$, $c=3$, et $d=2$. Alors $6x^2+x-2=(2x-1)(3x+2)$ (dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{C})$).

3. (a) Dans la série 22, on a vu que $\mathbb{C}^2$ est l'espace propre généralisé pour $\lambda=0$. Alors la multiplicité de $\lambda=0$ est de 2. Donc le polynôme caractéristique de T est $(z-0)^2=z^2$.

   (b) Dans la série 22, on a trouvé que T a deux valeurs propres, i et $-i$. La dimension de chaque espace propre généralisé est de 1. Alors le polynôme caractéristique de T est $(z-i)(z+i)=z^2+1$.

   (c) La seule valeur propre de T est $\lambda=5$, de multiplicité 2. Donc le polynôme caractéristique est $(z-5)^2=z^2-10z+25$.

4. Tout d'abord, on trouve les valeurs propres de T.

$$\begin{aligned} T(w,x,y,z) &= \lambda(w,x,y,z) \\ (w-2x+y+z,w-x+z,z,0) &= (\lambda w,\lambda x,\lambda y,\lambda z) \end{aligned}$$

Donc $w - 2x + y + z = \lambda w$, $w - x + z\lambda x$, $z = \lambda y$, et $0 = \lambda z$. De la dernière équation, on a $\lambda = 0$ ou $z = 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda y = z = 0 \Rightarrow y = 0$. De la deuxième équation, $w = (\lambda + 1)x$; faisant la substitution dans la première équation, on trouve que $(\lambda+1)x - 2x = \lambda(\lambda+1)x$, ou $(\lambda^2+1)x = 0$. Si $x = 0$ alors $w = 0$, et on a déjà que $y = z = 0$, et on a supposé tacitement que $(w, x, y, z) \neq 0$. Donc $\lambda^2 + 1 = 0$, c.-à-d. que $\lambda = \pm i$.

Ensuite, on trouve les espaces propres généralisés. Pour $\lambda = 0$, on a $T^2(w, x, y, z) = (-w + y, -x + y, 0, 0)$, $T^4(w, x, y, z) = T^2(T^2(w, x, y, z)) = (w - y, x - y, 0, 0)$. Alors $U_0 = \ker(T - 0 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^4})^4 = \{(w, x, y, z) | w = y, x = y\} = \mathrm{span}((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. On remarque que la multiplicité de $\lambda = 0$ est 2. Également, $((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une base de U_0.

Pour $\lambda = i$ et $\lambda = -i$, on a forcément que les multiplicités sont 1 (car $4 = m_0 + m_i + m_{-i}$, $m_0 = 2$ et $m_i, m_{-i} \geq 1$). Alors un vecteur propre généralisé est un vecteur propre tout court. On sait déjà que si $\lambda \neq 0$ alors $y = z = 0$ et $w = (\lambda+1)x$. Pour $\lambda = i$, on a $\ker(T - i\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{span}((1+i, 1, 0, 0))$. Pour $\lambda = -i$, on a $\ker(T - i\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathrm{span}((1-i, 1, 0, 0))$.

Donc la base de vecteurs propres généralisés est

$$B = \big((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1 + i, 1, 0, 0), (1 - i, 1, 0, 0)\big).$$

On remarque que $(1, 1, 1, 0)$ est une base de $\ker T$, et les derniers deux vecteurs sont des vecteurs propres. Alors il faut calculer $[T(0, 0, 0, 1)]_B = [(1, 1, 1, 0)]_B = (1, 0, 0, 0)$. Donc

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

5. (a) On montre plutôt que T n'est pas inversible si et seulement si $a_0 = 0$, ou (ce qui l'équivaut) que T n'est pas injectif si et seulement si $a_0 = 0$.

   Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de T. Le polynôme caractéristique de T est

$$(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_r)^{m_r}$$

   ou m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i. Alors $a_0 = \pm\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_r^{m_r}$. Donc $a_0 = 0$ si et seulement si $\lambda_i = 0$ pour un certain i, c.-à-d. $a_0 = 0$ si et seulement si 0 est une valeur propre de T. Mais 0 est une valeur propre de T si et seulement si le noyau de T est non-nul, et le noyau de T est non-nul si et seulement si T n'est pas injectif.

   (b) Par le théorème de Cayley-Hamilton, si p est le polynôme caractéristique de T, alors $p(T) = 0$. On écrit $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Alors

$$a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n = 0.$$

   Mais T est inversible, donc $a_0 \neq 0$, alors

$$I = T\left[-\frac{1}{a_0}\left(a_1 I + a_2 T + \cdots + a_n T^{n-1}\right)\right] = \left[-\frac{1}{a_0}\left(a_1 I + a_2 T + \cdots + a_n T^{n-1}\right)\right] T.$$

   Par conséquent, $T^{-1} = q(T)$, où

$$q(x) = -\frac{1}{a_0}\left(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}\right).$$