Algèbre linéaire, corrigé de la série 24

Jonathan Scott

22 mai 2006

1. (a) $N^2(w,x,y,z) = N(x,y,0,w) = (y,0,0,x)$, $N^3(w,x,y,z) = N(y,0,0,x) = (0,0,0,y)$, $N^4(w,x,y,z) = N(0,0,0,y) = (0,0,0,0)$, donc $N^4 = 0$ et N est nilpotent.

   (b) Du calcul ci-dessus, $N^3\vec{e}_3 = \vec{e}_4 \neq \vec{0}$ et $N^4\vec{e}_3 = \vec{0}$. En fait, $(N^3\vec{e}_3, N^2\vec{e}_3, N\vec{e}_3, \vec{e}_3) = (\vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est tout simplement une permutation de la base standard. Puisque $N\vec{e}_4 = \vec{0}$, $N\vec{e}_1 = \vec{e}_4$, $N\vec{e}_2 = \vec{e}_1$, et $N\vec{e}_3 = \vec{e}_2$, on a $[N]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Nous suivons la méthode au-dessus, nommément, de trouver $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ tel que $D^3p \neq 0$ mais $D^4p = 0$. Nous trouvons que $D^3(t^3) = 6$ et $D^4(t^3) = 0$, donc $B = (6, 6t, 3t^2, t^3)$ est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$ (voir s. 22, ex. 2), et $[D]_B$ est la matrice désirée.

2. (a) Il faut trouver $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ tel que $T^2 = 0$ mais $T \neq 0$. On a du choix, mais $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_3, z_4, 0, 0)$ est un tel opérateur.

   (b) Le polynôme minimal de l'opérateur $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ est z. Le polynôme minimal de l'opérateur $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ associé à la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est $(z-1)^2$ (car $S \neq I$ mais $(S-I)^2 = 0$). Donc le polynôme minimal de l'opérateur associé à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est $z(z-1)^2$. Explicitement, $T(w,x,y,z) = (0,0,y+z,z)$.

   (c) $T_1(w,x) = (x,0)$ vérifie $T_1 \neq 0$ mais $T^2 = 0$. $T_2(y,z) = (y+z,z)$ vérifie $T_2 \neq I$ mais $(T_2 - I)^2 = 0$. Par conséquent, le polynôme minimal de l'opérateur $T(w,x,y,z) = (x,0,y+z,z)$ est $z^2(z-1)$. (La matrice de T est diagonale en blocs, donc 2(b) s'applique.)

3. (a) On choisit la matrice diagonale en blocs, $\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$, alors $T(w,x,y,z) = (0, x+y, y, 3z)$.

   (b) On peut choisir une matrice diagonale $\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$, alors $T(w,x,y,z) = (0,x,y,3z)$.

4. L'opérateur associé à la matrice $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ est $T(x,y) = (2x-4y, 2y)$. Nous devons trouver une base $B = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ telle que $T\vec{w}_1 = 2\vec{w}_1$ et $T\vec{w}_2 = \vec{w}_1 + 2\vec{w}_2$. On voit déjà que $T(1,0) = 2(1,0)$, alors on pose $\vec{w}_1 = (1,0)$. Or, $T(0,1) = (-4,2)$, alors $T(0,-1/4) = (1,-1/2) = (1,0) + 2(0,-1/4)$.

Évidemment, $((1,0),(0,-1/4))$ est linéairement indépendente, et donc elle est la base de Jordan désirée.

$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$: $\vec{v}_1=\vec{e}_1$, $\vec{v}_2=\vec{e}_2$, $\vec{v}_3=\vec{e}_3-\vec{e}_2$ (alors $T\vec{v}_3=(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)-(\vec{e}_1+\vec{e}_2)=\vec{e}_3=\vec{v}_2+\vec{v}_3$).

La matrice Jordan est $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$: $\vec{v}_1=\vec{e}_1$, $\vec{v}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{v}_3=\vec{e}_3$. Matrice Jordan $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$: base de Jordan $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_1+\vec{e}_3)$, matrice Jordan $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$: base de Jordan $(\vec{e}_2,\vec{e}_1,\vec{e}_3)$, matrice Jordan $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

5. (a) $\begin{bmatrix}0&-1&0&-1\\1&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$.

   (b) i et $-i$ sont les valeurs propres. Une base de $\ker(T-iI)^4$ est $((i,1,0,0),(0,0,i,1))$; une base de $\ker(T+iI)^4$ est $((1,i,0,0),(0,0,1,i))$. On vérifie que $B=((i,1,0,0),(0,0,i,1),(1,i,0,0),(0,0,1,i))$ est linéairement indépendente et donc une base de $\mathbb{C}^4$. Or, $T(i,1,0,0)=i(i,1,0,0)$, $T(0,0,i,1)=i(i,1,0,0)+i(0,0,i,1)$, $T(1,i,0,0)=-i(1,i,0,0)$, et $T(0,0,1,i)=-i(1,i,0,0)-i(0,0,1,i)$. alors
$$[T]_B=\begin{bmatrix}i&i&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&-i\\0&0&0&-i\end{bmatrix}.$$

   (c) On pose $v_1=(i,1,0,0)$ et $v_2=(1/i)(0,0,i,1)=-i(0,0,i,1)=(0,0,1,-i)$. Alors $Tv_2=(i,1,i,1)=v_1+iv_2$. Pareillement, on pose $v_3=(1,i,0,0)$ et $v_4=(1/(-i))(0,0,1,i)=i(0,0,1,i)=(0,0,i,-1)$. Donc $Tv_4=v_3-iv_4$. Alors (v_1,v_2,v_3,v_4) est une base de Jordan, et la matrice Jordan est
$$\begin{bmatrix}i&1&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&1\\0&0&0&-i\end{bmatrix}.$$