Algèbre linéaire, corrigé de la série 25

Jonathan Scott

29 mai 2006

1. $T(0,1,0) = (0,1,0)$, donc on prend la base $B = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$. Puis $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Le bloc $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre réelle, donc la matrice n'est pas diagonalisable.

2. $T(1,1,1) = (1,1,1)$, alors $(1,1,1)$ est un vecteur propre de T. Au lieu de chercher des autres valeurs propres, nous complétons la base ; disons $B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Or, $T(1,1,0) = (0,1,1) = (1,1,1) - (1,0,0)$ et $T(1,0,0) = (0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0)$. Donc $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Ensuite, nous nous demandons si $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ a une valeur propre réelle. Supposons que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$. Alors $z = \lambda y$ et $-y - z = \lambda z$. Donc $-y - \lambda y = \lambda^2 y$, ou $(\lambda^2 + \lambda + 1)y = 0$. Puisque $x^2 + x + 1$ n'a pas de racine réelle, ce bloc n'a pas de valeur propre et on a fini.

3. (a) On procède bloc par bloc et calcule $(AB)_{ij}$ dans les cas $i, j \leq n_1$, $i > n_1$ et $j \leq n_1$, et $i, j > n_1$. Tout d'abord, supposons que $i, j \leq n_1$. On remarque que

$$A_{ik} = \begin{cases} (A_1)_{ik} & \text{si } k \leq n_1 \\ 0 & \text{si } k > n_1 \end{cases}$$

   et pareillement pour B_{kj}. Donc

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n_1} (A_1)_{ik}(B_1)_{kj} = (A_1B_1)_{ij}.$$

   Ensuite, supposons que $i > n_1$ et $j \leq n_1$. Si $k \leq n_1$, alors $A_{ik} = 0$, et si $k > n_1$, alors $B_{kj} = 0$. Donc

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n_1} (0)B_{kj} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} A_{ik}(0) = 0.$$

   Finalement, supposons que $i, j > n_1$. Si $k \leq n_1$, alors $A_{ik} = 0$, et si $k > n_1$, alors $A_{ik} = (A_2)_{i-n_1,k-n_1}$. De plus, si $k > n_1$, $B_{kj} = (B_2)_{k-n_1,j-n_1}$. Donc

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} (A_2)_{i-n_1,k-n_1}(B_2)_{k-n_1,j-n_1} = (A_2B_2)_{i-n_1,j-n_1}.$$

   Par conséquent,

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & * \\ 0 & A_2B_2 \end{bmatrix}.$$

(b) D'abord on montre que $A^m = \begin{bmatrix} A_1^m & * \\ 0 & A_2^m \end{bmatrix}$ pour tout $m \geq 1$. C'est évident pour $m = 1$. Supposons par récurrence que $A^{m-1} = \begin{bmatrix} A_1^{m-1} & * \\ 0 & A_2^{m-1} \end{bmatrix}$. Alors

$$A^m = AA^{m-1} = \begin{bmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{m-1} & * \\ 0 & A_2^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^m & * \\ 0 & A_2^m \end{bmatrix}$$

où on utilise 3(a) avec $B = A^{m-1}$.
Supposons que $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$. Alors

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_{i=0}^m a_i A^i \\ &= \sum_{i=0}^m a_i \begin{bmatrix} A_1^i & * \\ 0 & A_2^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m a_i A_1^i & * \\ 0 & \sum_{i=0}^m a_i A_2^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p(A_1) & * \\ 0 & p(A_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) On utilise récurrence sur k. Pour $k = 1$ c'est évident. Supposons vrai pour $k-1$. On pose $D = \begin{bmatrix} C_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{k-1} \end{bmatrix}$. Donc $C = \begin{bmatrix} D & * \\ 0 & C_k \end{bmatrix}$ et $p(D) = \begin{bmatrix} p(C_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p(C_{k-1}) \end{bmatrix}$ (par l'hypothèse de récurrence). Alors par 3(b),

$$p(C) = \begin{bmatrix} p(D) & * \\ 0 & p(C_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(C_1) & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & p(C_{k-1}) & \\ & & & p(C_k) \end{bmatrix}$$

4. (a) $c_A(x) = (x-0)(x-0) - (1)(1) = x^2 - 1$.
   (b) $T_A(1,1) = (1,1)$, $T_A(1,-1) = (-1)(1,-1)$, alors $((1,1),(1,-1))$ est une base de vecteurs propres.
   (c) $[T_A]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Le polynôme caractéristique est $(x-1)(x-(-1)) - (0)(0) = x^2 - 1 = c_A(x)$.
5. $A^2 = -I$, alors $p(A) = A^2 - 2A + I = (-I) - 2A + I = -2A$. Donc $p(A)$ est inversible si et seulement si A est inversible, et $(p(A))^{-1} = (-1/2)A^{-1}$. Puisque $A^2 = -I$, alors $-A^2 = I$, c.-à-d. que $(-A)A = A(-A) = I$. Donc $A^{-1} = -A$. Par conséquent, $(p(A))^{-1} = (-1/2)(-A) = (1/2)A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.