# Algèbre linéaire, corrigé de la série 27

Jonathan Scott

19 juin 2006

1. Soit $E$ la base standard. On pose $U = [I]_{B,E}$. Alors $[T_A]_B = U^{-1}AU$.
   (a) $U = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, alors $U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Donc $[T_A]_B = \begin{bmatrix} -12 & -13 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$.
   (b) $U = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$, $U^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $[T_A]_B = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 129 & -405 \\ 5 & 186 \end{bmatrix}$.
   (c) $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $U^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $[T_A]_B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -3 & - & -1 \\ 10 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.
2. (a) On remarque que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ si et seulement si $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$, et $\sigma^{-1}$ est unique pour une $\sigma$ donnée. De plus, $\sigma^{-1}$ est paire si et seulement si $\sigma$ est paire. Donc,

$$\begin{aligned}
\det A^* &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{NI(\sigma)}(A^*)_{1\sigma(1)}\cdots(A^*)_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma}(-1)^{NI(\sigma)}\bar{A}_{\sigma(1)1}\cdots\bar{A}_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma^{-1}}(-1)^{NI(\sigma)}\bar{A}_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots\bar{A}_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \overline{\sum_{\sigma^{-1}}(-1)^{NI(\sigma)}A_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}} \\
&= \overline{\det A}.
\end{aligned}$$

   (b) $\det(cA) = \sum_\sigma(-1)^{NI(\sigma)}(cA)_{1\sigma(1)}\cdots(cA)_{n\sigma(n)} = c^n\sum_\sigma(-1)^{NI(\sigma)}A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)} = c^n\det A$.
   (c) On suppose le résultat de l'exercice suivant. Supposons que $\vec{\ell}_i(A) = \vec{\ell}_i(A)$. Alors si l'on permute la ligne $i$ et la ligne $j$ dans $A$, rien ne change. Alors, selon 2(d), $\det A = -\det A$, ou $2\det A = 0$, i.e. $\det A = 0$.
   Ensuite, on constate que si $A'$ est obtenue de $A$ en multipliant la ligne $i$ par $a \in \mathbb{F}$, alors $\det A' = a\cdot\det A$. En effet,

$$\begin{aligned}
\det A' &= \sum_{\sigma}(-1)^{NI(\sigma)}A'_{1\sigma(1)}\cdots A'_{i\sigma(i)}\cdots A'_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma}(-1)^{NI(\sigma)}A_{1\sigma(1)}\cdots(aA_{i\sigma(i)})\cdots A_{n\sigma(n)} \\
&= a\sum_{\sigma}(-1)^{NI(\sigma)}A_{1\sigma(1)}\cdots A_{n\sigma(n)} \\
&= a\det A.
\end{aligned}$$

En particulier, si $\vec{\ell}_i(A) = \vec{0}$, alors $\det A = 0 \cdot \det A = 0$.

Or, supposons que $\vec{\ell}_i(A) = a \cdot \vec{\ell}_j(A)$. Si $a = 0$ alors $\det A = 0$. Supposons que $a \neq 0$. Soit $B$ la matrice obtenue de $A$ en multipliant la ligne $j$ par $a$. Alors $\vec{\ell}_i(B) = \vec{\ell}_j(B)$. Par conséquent, $\det B = 0$. Donc $\det A = (1/a) \det B = 0$.

Le raisonnement pour les colonnes est pareil.

(d) On constate que si $\tau \in \mathfrak{S}_n$, alors l'application $T_\tau : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$, est une bijection (son inverse est $T_{\tau^{-1}}$). Alors $T_\tau$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Donc, si $f : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{F}$ est une fonction (e.g. $f(\sigma) = (-1)^{NI(\sigma)} A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}$ pour une certaine matrice $A$), alors

$$\sum_\sigma f(\sigma) = \sum_{T_\tau \sigma} f(T_\tau \sigma).$$

Or, supposons que $A'$ est obtenue de $A$ en permutant les lignes $i$ et $j$, $i < j$. On pose $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, et $\tau(k) = k$ si $k \neq i, j$. Alors

$$\begin{aligned}
\det A' &= \sum_\sigma (-1)^{NI(\sigma)} A'_{1\sigma(1)} \cdots A'_{i\sigma(i)} \cdots A'_{j\sigma(j)} \cdots A'_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_\sigma (-1)^{NI(\sigma)} A_{1\sigma(1)} \cdots A_{j\sigma(i)} \cdots A_{i\sigma(j)} \cdots A_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\tau} -(-1)^{NI(\sigma\tau)} A_{1\sigma\tau(1)} \cdots A_{j\sigma\tau(j)} \cdots A_{i\sigma\tau(i)} \cdots A_{n\sigma\tau(n)} \\
&= -\det A
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $NI(\sigma\tau) = NI(\sigma) \pm 1$ puisque $\tau$ est une transposition.

Supposons que $A'$ est obtenue de $A$ en permutant deux colonnes, $i$ et $j$ disons. Soit $B$ la matrice obtenue de $A^*$ en permutant les deux lignes $i$ et $j$. Alors $A' = B^*$. Donc $\det A' = \overline{\det B} = \overline{-\det A^*} = -\overline{\det A^*} = -\det A$.

3. (a) $NI(\sigma) = \#\{(1,3),(2,3)\} = 2$, alors $\sigma$ est paire.

(b) $NI(\sigma) = \#\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} = 4$, alors $\sigma$ est paire.

(c) $NI(\sigma) = \#\{(1,2),(1,4),(1,5),(1,7),(2,4),(2,5),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,7),(5,7),(6,7)\} = 15$, alors $\sigma$ est impaire.

(d) Soit $i < j$. On constate que $NI((ij) \circ \sigma) = 1 + NI(\sigma)$ modulo 2. En effet, on pose $\rho = (ij)\sigma$, $k = \sigma^{-1}(i)$ et $\ell = \sigma^{-1}(j)$. Alors $\rho(k) = j$, $\rho(\ell) = i$, et $\rho(a) = \sigma(a)$ si $a \neq k, \ell$. De plus, $\sigma(k) = i < j = \sigma(\ell)$ mais $\rho(k) = j > i = \rho(\ell)$. Si $k < \ell$, alors on a ajouté une inversion, i.e. $NI(\rho) = NI(\sigma) + 1$. Par contre, si $k > \ell$, alors on a enlevé une inversion, et $NI(\rho) = NI(\sigma) - 1$.

Maintenant, on montre par récurrence que $(a_1 \cdots a_m)$ est paire si $m$ est impaire et paire si $m$ est paire. Si $m = 2$, alors $(a_1 a_2)$ est une transposition, qui est impaire. Supposons qu'on sait la parité de $(a_1 \cdots a_{m-1})$. On remarque que $(a_1 \cdots a_m) = (a_1 a_m)(a_1 \cdots a_{m-1})$. Si $m$ est pair, alors $m-1$ est impair, donc $(a_1 \cdots a_{m-1})$ est paire, donc $(a_1 \cdots a_m)$ est impaire. Pareillement, si $m$ est impair, alors $(a_1 \cdots a_m)$ est paire.

4. (a) $V = \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (-y,x)$. Alors $T^2(x,y) = (-x,-y) = -(x,y)$. Donc $T^2$ a une valeur propre, $\lambda = -1$, de multiplicité 2. Alors $\mathrm{Tr}(T^2) = -2 < 0$.

(b) Soit $B$ une base de $V$ de vecteurs propres de $T$. Alors $[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$. Par conséquent, $\mathrm{Tr}(T^2) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 \geq 0$.

5. Puisque $P \circ P = P$, $P$ est un projecteur. Donc $V = (\operatorname{Im} P) \oplus (\ker P)$. De plus, si $\lambda$ est une valeur propre, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. En effet, $\ker P$ est évidemment l'espace propre de 0. Si $v \in \operatorname{Im} P$, alors $v = Pw$ pour un certain $w \in V$, donc $Pv = P(Pw) = Pw = v$. Par conséquent, $\operatorname{Im} P$ est l'espace propre de 1. $\operatorname{Tr} P$ est la multiplicité de $\lambda = 1$, ce qui est la dimension de $\operatorname{Im} P$, forcément un nombre naturel.
6. (a) Soit $B$ une base de $V$. On pose $A = [T]_B$. Alors $[cT]_B = c[T]_B = cA$. De plus, $\operatorname{Tr} T = \operatorname{Tr} A$ et $\operatorname{Tr}(cT) = \operatorname{Tr}(cA)$. Or, $\operatorname{Tr}(cA) = \sum_{i=1}^n cA_{ii} = c\sum_{i=1}^n A_{ii} = c \cdot \operatorname{Tr} A = c \cdot \operatorname{Tr} T$.
   (b) On prend $S = T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $T(x, y) = (-y, x)$. Alors $(\operatorname{Tr} T)^2 = 0$ tandis que $\operatorname{Tr} T^2 = -2$.
   (c) On prend $S = \mathrm{Id}_V$, $T = -\mathrm{Id}_V$. Alors $\det S = 1$, $\det T = (-1)^{\dim V}$. Si $n$ est impair, alors $\det S + \det T = 2$, tandis que $\det(S + T) = \det(0) = 0$.