Algèbre linéaire 1ère année — SÉRIE 1 — le 24 octobre 2005

*L'exercice 3 est à rendre le 31 octobre au debut de la séance d'exercices.*

1. Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, ou bijectives. Lorsque c'est possible, trouver un sous-ensemble $X$ du domaine de définition de l'application tel que la restriction de l'application à $X$ est une bijection, et expliciter l'application réciproque.
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : t \mapsto t^3$.
   (c) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & x \geq 0 \\ 1 - (x+1)^2 & x < 0. \end{cases}$
2. Soient $X, Y$, et $Z$ des ensembles, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective, et $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
3. Soient $X, Y$ deux ensembles. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de $X$. Alors $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$. Supposons que $A, B \subset X$ et que $C, D \subset Y$. Prouver les affirmations suivantes.
   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   (c) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si $f$ est injective.
   (d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
   (e) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
4. Déterminer quelles des applications ci-dessous sont égales. Les domaines sont donnés implicitement.
   (a) $f_1(x) = x$
   (b) $f_2(x) = \sqrt{x^2}$
   (c) $f_3(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   (d) $f_4 = \sqrt[3]{x^3}$
   (e) $f_5 = |x|$
   (f) $f_6 = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$.
5. Montrer que les relations suivantes sont les relations d'équivalence.
   (a) dans $\mathbb{R}^2$ : $(u, v) \sim (u', v')$ ssi $v - v' = u - u'$. Dessiner la classe d'équivalence qui contient $(0, 1)$.
   (b) $f : X \to Y$, $x \sim x'$ ssi $f(x) = f(x')$.
6. Montrer par récurrence :
   (a) La somme des $n$ premiers nombres naturels est égale à $n(n+1)/2$. En déduire que la somme des $n$ premiers nombres *impairs* égale $n^2$.
   (b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.