Algèbre linéaire 1ère année SÉRIE 2 le 24 octobre 2005

L'exercice 3 est à rendre le 7 novembre au debut de la séance d'exercices.

Dans cette série, le symbole $\mathbb{F}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$, et V est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$.

1. Montrer que $-(-v) = v$ pour tout $v \in V$.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{F}$, $v \in V$, et $av = 0$, alors soit $a = 0$, soit $v = 0$.
3. Déterminer lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{F}^3$ ci-dessous sont des sous-espaces de $\mathbb{F}^3$. Le cas échéant, expliciter quelle propriété ne se vérifie pas.
   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$.
   (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0\}$.
   (d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3 \mid x_1 = 5x_3\}$.
4. Trouver un sous-ensemble non-vide U de $\mathbb{R}^2$ tel que U est stable pour l'addition et pour l'inversion additive (c-à-d que $u + v \in U$ et $-u \in U$ pour tout $u, v \in U$), mais U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
5. Trouver un sous-ensemble non-vide U de $\mathbb{R}^2$ tel que U est stable pour la multiplication scalaire mais U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
6. Montrer que l'intersection d'une collection quelconque de sous-espaces de V est un sous-espace de V.
7. Soient U et W deux sous-espaces de V. Montrer que la réunion $U \cup W$ est un sous-espace de V si et seulement si $U \subset W$ ou $W \subset U$.