Algèbre linéaire 1ère année — SÉRIE 3 — le 7 novembre 2005

L'exercice 3 est à rendre le 14 novembre au debut de la séance d'exercices.
Dans cette série, $\mathbb{F}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$, et V est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$.

1. On se donne deux nombres réels, a et b, qui ne sont pas tous les deux nuls. On se rappelle que $i \in \mathbb{C}$ vérifie $i^2 = -1$. Trouver deux réels c et d tels que
$$\frac{1}{a+bi} = c + di.$$
2. Montrer que
$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
est une racine cubique de 1.
3. On désigne par $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{F})$ l'ensemble des matrices de dimension 2×2 à coefficients dans $\mathbb{F}$. Une matrice A dans $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{F})$ a deux *lignes* et deux *colonnes* :
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$
L'addition de deux matrices s'effectue coefficient par coefficient ; c-à-d que
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}.$$
La multiplication par un scalaire est définie par
$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}.$$
   (a) Montrer que les opérations ci-dessus munissent $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{F})$ d'une structure d'espace vectoriel.
   (b) On appelle *triangulaire* toute matrice $A = (a_{ij})$ telle que $a_{12} = 0$. Montrer que les matrices triangulaires forment un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{F})$.
   (c) On appelle *symétrique* toute matrice $A = (a_{ij})$ telle que $a_{12} = a_{21}$. Montrer que les matrices symétriques forment un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{F})$.
4. On note $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}$. Soit $c \in \mathbb{F}$. Montrer que le sous-ensemble des polynômes $p(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tels que $p(c) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.
5. Soient X et Y deux ensembles. On note $\mathcal{F}(X,Y)$ l'ensemble des applications ensemblistes de X dans Y :
$$\mathcal{F}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ est une application}\}.$$

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ et $f \in \mathcal{F}(X, V)$, alors $f(x)$ est un vecteur dans V pour tout $x \in X$. On peut donc munir $\mathcal{F}(X, V)$ de l'addition vectorielle et de la multiplication scalaire de V. En effet, si $f, g : X \to V$ et $a \in \mathbb{F}$, on définit

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$$

et

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) \quad \forall x \in X.$$

(a) Montrer que $\mathcal{F}(X, V)$ est un espace vectoriel par rapport aux opérations définies ci-dessus.

(b) Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble, et soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. Montrer que

$$[Z, W] = \{f : X \to V \mid f(z) \in W \ \forall z \in Z\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, V)$. Comparer $[Z, W]$ et $\mathcal{F}(Z, W)$.

(c) Supposons que $X = V = \mathbb{F}$. Montrer que

$$\mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_+ = \{f : \mathbb{F} \to \mathbb{F} \mid f(-x) = f(x)\}$$

(l'ensemble des applications *paires*) et

$$\mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_- = \{f : \mathbb{F} \to \mathbb{F} \mid f(-x) = -f(x)\}$$

(l'ensemble des applications *impaires*) sont des sous-espaces vectoriels. Calculer $\mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_+ \cap \mathcal{F}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_-$.

6. On pose

$$U = \{az^2 + az^5 \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \mid a \in \mathbb{F}\}.$$

(a) Montrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

(b) Trouver un sous-espace vectoriel W de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ tel que $\mathcal{P}(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

7. Montrer, ou donner un contre-exemple : si U_1, U_2, et W sont des sous-espaces de V tels que

$$V = U_1 \oplus W \quad \text{et} \quad V = U_2 \oplus W,$$

alors $U_1 = U_2$.