Algèbre linéaire 1ère année — SÉRIE 5 — le 21 novembre 2005

L'exercice 4 est à rendre le 28 novembre au debut de la séance d'exercices.

1. Trouver une liste génératrice pour le sous-espace
$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 2x_5 \text{ et } x_3 = x_2 + 5x_4\}$$
de $\mathbb{R}^5$.
2. On se rappelle l'algorithme d'Euclide pour les polynômes : étant donné des polynômes $p(z), q(z)$ avec $\deg p(z) \geq \deg q(z)$, il existe des polynômes $s(z)$ et $r(z)$ avec $0 \leq \deg r(z) < \deg q(z)$, tels que $p(z) = s(z)q(z) + r(z)$.
   (a) Soient $p(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ et $c \in \mathbb{F}$. Montrer que $p(c) = 0$ si et seulement s'il existe $q(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tel que $p(z) = (z - c)q(z)$.
   (b) Trouver une liste génératrice pour le sous-espace
$$U = \{p(z) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) \mid p(1) = 0\}$$
de $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$.
   (c) Soit $c \in \mathbb{F}$. Trouver une liste génératrice pour le sous-espace
$$W = \{p(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \mid p(c) = 0\}$$
de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.
3. Soit $X = \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ est de dimension finie.
4. Supposons que la liste $(v_1, \ldots, v_n)$ est linéairement indépendante dans V. Soit $w \in V$. Montrer que si $(v_1 + w, \ldots, v_n + w)$ est linéairement *dépendante*, alors $w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$.
5. Montrer que V est de dimension infinie si et seulement s'il existe une suite $v_1, v_2, \ldots$ de vecteurs dans V telle que $(v_1, \ldots, v_n)$ est linéairement indépendante quelque soit $n \geq 1$.
6. Soit $\mathbb{F}^\infty$ l'ensemble des listes $(x_1, x_2, \ldots)$ avec $x_n \in \mathbb{F}\ \forall\ n \geq 1$. On note $(x_n) \in \mathbb{F}^\infty$ une telle liste.
   (a) Montrer que $\mathbb{F}^\infty$ est un espace vectoriel, avec $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ et $c(x_n) = (cx_n)$ pour $x_n, y_n, c \in \mathbb{F}$.
   (b) Montrer que $\mathbb{F}^\infty$ est de dimension infinie.
7. Soit $C[0, 1]$ l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $C[0, 1]$ est de dimension infinie.